


曾庆敦 编著

# 复合材料的细观破坏机制与强度

21世纪固体力学丛书

科学出版社
www.sciencep.com

(TU-0203.0101)
丛书策划：童安齐　匡　敏
文案编辑：吴伶伶
责任印制：钱玉芬
封面设计：张　放

# 21世纪固体力学丛书

《高等板壳理论》
《非线性空间结构力学》
《声弹性技术》
《复合材料的细观破坏机制与强度》
《结构完整性评估》
《光纤光栅传感技术》
《概率断裂力学及工程应用》
《工程材料及构件的疲劳设计》

ISBN 7-03-010320-3
9 787030 103208 >

ISBN 7-03-010320-3
定　价：28.00元

21世纪固体力学丛书

# 复合材料的细观破坏机制与强度

曾庆敦　编著

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书是有关复合材料细观破坏机制及强度方面的论著，是作者根据近年来所做的研究工作和参考国内外有关论著编写而成的。

本书内容共分为7章，包括：复合材料的发展历史、分类及其应用；纤维断裂和基体或界面损伤导致的单向纤维复合材料的细观应力集中；纤维和纤维束的统计拉伸强度及其实验测定；单向纤维复合材料的强度分析；正交叠层板的拉伸破坏与强度；短纤维复合材料破坏与强度；混杂纤维复合材料的拉伸破坏机制与混杂效应，主要介绍应力传递理论、剪滞理论、统计强度理论及复合材料的协同效应等。

本书可作为高等理工科学院力学、材料科学等有关专业的高年级本科生和研究生的教材，也可供力学、材料科学等专业的教师和从事复合材料研制、开发及结构设计的有关工程技术人员、科研人员参考。

**图书在版编目(CIP)数据**

复合材料的细观破坏机制与强度/曾庆敦编著. —北京：科学出版社，2002
(21世纪固体力学丛书)
ISBN 7-03-010320-3

Ⅰ. 复… Ⅱ. 曾… Ⅲ. 复合材料结构力学-研究生-教材 Ⅳ. TB330.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第018808号

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
源海印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2002年9月第 一 版 开本：720×1000 B5
2002年9月第一次印刷 印张：16
印数：1—3 000 字数：316 000

**定价：28.00元**

(如有印装质量问题，我社负责调换(兰各))

## 《21 世纪固体力学丛书》编委会

**主　编**　黄培彦

**副主编**　韩　强

**编　委**　(以姓氏笔画为序)

汤立群　陈国华　罗　毅

贺玲凤　贾乃文　曾庆敦

# 总　序

自从产业革命以来，在工业技术的发展中，力学曾大显身手。特别是20世纪中叶以来，近代力学基础性、探索性的超前研究曾对当代产业例如航空、航天工业的发展起到过主导的作用。从中固体力学取得了令人瞩目的成就。

随着知识经济和信息时代的到来，21世纪我国经济建设将会加速发展。一大批高新技术产业和跨世纪骨干产业的形成，将会带来许多新的复杂的工程实际问题，这不仅为固体力学提供了大量的新课题，而且亦成为固体力学学科发展的新动力。固体力学既要适应生产实际的发展，面向工程实际，解决生产难题，同时亦应从工程实际中提炼出具有普遍性的问题进行系统的研究，促进各分支学科的成长，从而推动整个固体力学学科的发展。

中青年学者尤其青年学者是21世纪我国固体力学研究领域的主力军。目前，一大批优秀的青年学者已经成长为新一代的学科带头人，活跃在固体力学的诸多前沿研究领域。由他们联合撰写的固体力学系列专著，从各自不同的研究角度出发，反映了最新的研究成果及其发展趋势，对该学科的发展具有重要的影响和参考价值。毫无疑问，《21世纪固体力学丛书》在这方面做了一个很好的尝试。

《21世纪固体力学丛书》围绕固体力学的若干前沿研究领域，基于近代固体力学理论的最新研究成果，在结构的疲劳设计、概率断裂力学、复合材料强度理论、非线性力学以及新的实验测试技术等方面进行了系统的总结。该丛书不仅阐述了基本概念、基本理论、基本方法，而且有许多内容是作者们多年来卓有成效的研究成果，具有理论与应用并重的特色。丛书有助于初次涉足这一领域的学生和研究人员在较短的时间内从较高的起点上开展固体力学的研究工作。

我相信，《21世纪固体力学丛书》的出版将会对固体力学的理论研究和工程应用发挥积极的促进作用。

高镇同

2001年12月

# 前　言

近几十年来，复合材料已得到日益广泛的应用。过去复合材料主要应用于航空航天领域，现在已越来越多地扩展到其他领域，如建筑、造船、汽车、化工、机械、体育用品等。随着技术的成熟、成本的降低、性能的提高，复合材料的应用范围将愈来愈广。

由于复合材料具有许多独特的优点，如比强度和比刚度高、抗疲劳性能和减振性能好、结构的可设计性和工艺性好等，吸引了大批学者从事复合材料及复合材料力学等方面的研究工作。复合材料力学包括很多基本问题，例如纤维和基体之间的力的传递机制、破坏机制、损伤、断裂、强度等。弄清这些问题，对复合材料力学，乃至设计和研制新的复合材料都有帮助。目前，关于复合材料力学、复合材料细观力学已有许多很出色的论著，其中包括适合大学生或研究生学习的教材，但是，在国内外，尤其是国内还极少见到有关复合材料细观破坏机制及强度方面有特色的论著。为此，本人根据多年来在复合材料学科从事教学与科学研究的实践，写成了这本书。本书在撰写过程中重点参考了 T. W. Chou 的论著“*Microstructural Design of Fiber Composites*”，同时还参考了国内外众多优秀的论著及本人等的研究成果，以使本书尽量反映国内外这方面最新的教学与科研成果，尽量满足有关工作的实际需要。

本书适合从事复合材料的研制、开发、应用和从事复合材料力学工作的研究人员和工程技术人员阅读，也可以作为高年级本科生和研究生的教材或参考书。在本书后面列出了比较重要的参考文献目录，供读者查阅。

在本书的撰写过程中，得到了华南理工大学交通学院和科学出版社的鼓励、关心和支持，也得到全国同行们的关心和支持。本人的科研工作还得到了国家自然科学基金和多项广东省自然科学基金(960225,000391)的资助，在此，本人谨致谢意。同时，也要感谢那些在书中被引用的国内外的专家学者，由于书中编入了他们的工作成果，才使本书变得丰富多彩。

本书尽量用统一的观点，总结和阐述有关材料，有关的名词、术语及符号也尽量采用国家标准，但因国内外较少有人做过这方面的工作，很多东西无可借鉴，所以难免有不当之处，恳请读者不吝指正。

曾庆敦

2002 年 2 月于广州华南理工大学

# 目　录

**总序**
**前言**
**第一章　绪论** …… 1
1.1　复合材料的发展历史及其应用 …… 1
1.2　复合材料及其分类 …… 2
1.3　复合材料叠层结构 …… 3
1.4　纤维增强复合材料的性能特点 …… 4
1.5　研究复合材料强度与破坏的内容与方法 …… 6
思考题 …… 7
**第二章　单向复合材料的细观应力集中** …… 8
2.1　剪滞理论 …… 8
2.2　单向复合材料的动应力集中 …… 18
2.3　修正的剪滞模型 …… 22
2.4　单向复合材料中的纤维和基体的应力集中 …… 38
思考题 …… 51
**第三章　纤维和纤维束的统计拉伸强度** …… 52
3.1　概率的基本知识 …… 52
3.2　纤维强度分布的统计特性 …… 55
3.3　纤维束强度的统计分析 …… 57
3.4　单纤维强度与纤维束强度之间的相互关系 …… 58
3.5　韦布尔形状参数的实验测定 …… 60
思考题 …… 63
**第四章　单向纤维复合材料的纵向拉伸强度** …… 64
4.1　材料力学半经验法 …… 64
4.2　链式统计模型 …… 67
4.3　裂纹扩展模型 …… 73
4.4　纤维束模型与链式模型相结合的方法 …… 89
4.5　随机扩大临界核统计模型 …… 92
思考题 …… 97
**第五章　正交叠层板的强度与破坏** …… 98
5.1　单向复合材料多级破坏期间的能量吸收 …… 98

5.2 正交叠层板的横向开裂 …… 99
5.3 横向开裂的统计分析 …… 104
5.4 横向开裂和蒙特卡罗模拟 …… 107
5.5 多向叠层板中的脱层 …… 114
5.6 正交叠层板横向开裂的一种剪滞分析 …… 118
5.7 碳/环氧正交叠层板的统计破坏强度分析 …… 130
5.8 正交叠层板的最终破坏问题 …… 140
思考题 …… 150
**第六章 短纤维复合材料的强度与破坏** …… 151
6.1 荷载传递 …… 151
6.2 短纤维复合材料的强度与破坏 …… 156
6.3 短纤维复合材料的断裂行为 …… 175
思考题 …… 176
**第七章 混杂复合材料的拉伸破坏机制及混杂效应** …… 178
7.1 概述 …… 178
7.2 层内混杂复合材料的应力集中 …… 179
7.3 层间混杂叠层复合材料的应力集中 …… 196
7.4 拉伸应力应变行为 …… 207
7.5 强度理论 …… 213
思考题 …… 238
**主要参考文献** …… 239

# 第一章 绪 论

本章简要介绍了复合材料的发展历史及其在航空航天、运输工程及土木工程等方面的应用，给出了复合材料的定义及其分类、复合材料叠层结构的制作方法及复合材料的主要性能特点。最后简要介绍了研究复合材料强度与破坏的主要内容和研究方法。

## 1.1 复合材料的发展历史及其应用

近几十年来，**复合材料**在航天、航空、汽车、造船、化工及土建方面得到日益广泛的应用。事实上，复合材料的使用已有悠久的历史。我国古代采用黏土和稻草制成的泥砖和泥墙；古埃及人把木板进行不同排列制成多层木板；中世纪有用不同材料复合做成的弓(以木材为芯，受拉面粘有平行的纤维，受压面粘有牛角)、剑和盔甲；近代的胶合板、钢筋混凝土结构等实际上都是复合材料。而现代复合材料是从20世纪40年代开始生产玻璃纤维增强聚合物基体复合材料(玻璃钢)而发展起来的。玻璃纤维增强复合材料因刚度较低，限制了它在结构上的应用。20世纪60年代高模量硼纤维的问世，硼纤维增强环氧复合材料在F-111战术轰炸机水平安定面的研制成功，开始了复合材料在高性能航空航天结构上的应用。此后，碳纤维、芳纶纤维相继问世，并很快形成了商品化产品。先进的复合材料的出现，是科学技术上的一大突破。人们在使用材料上从过去只能为特定结构物选择材料，发展到目前已有可能为特定结构物设计材料。

玻璃纤维增强环氧树脂复合材料制作的直升飞机旋翼系统，合理利用了材料的刚度和阻尼特性，设计成了结构简单、使用和维修方便的无绞式旋翼，不仅使直升飞机的机动性和加速性都得到显著的改善，而且大大延长了其使用寿命。1986年，Burt Rutan公司及其合作者利用先进复合材料优异的比强度、比刚度及出色的韧性和弹性变形能力研制的全复合材料飞机，经受了多次暴风、雷雨的袭击；创下了不着陆环球飞行的世界记录。复合材料独特的气动弹性剪裁设计特性，使美国X-29前掠翼飞机于1987年试飞成功。纤维增强复合材料还具有不反射无线电波、微波易穿透及无磁性等特性，是一种性能良好的隐身飞机材料，1988年，美国应用复合材料研制成功了B-2隐形轰炸机。目前，几乎所有正在研制的飞机、导弹、火箭和各种航天飞行器，都已大量使用了复合材料，使用的部件有机翼、尾翼和整流罩等，约占结构总质量的20%～40%。如欧洲新型的空中巴士380，除大梁外，机身、机翼、操作纵面均采用复合材料，其用量是波音777的2倍，仅机翼就用了53t(整

个机翼为 88t)。可见,从军用飞机到民用飞机的大面积推广,说明复合材料的成熟程度有很大的提高,从损伤容限的设计、材料的选择、制造计算的工程化这几方面反映出复合材料技术有很大的提高。有人把复合材料的出现,称为航空工业自喷气发动机发明以来最大的技术革命。随着工业化生产和技术进步及复合材料价格的降低,近年来在车辆、船舶、化工、建筑及体育用具上也得到广泛的应用,已制成有自重轻、耗油省的全复合材料的汽车及用复合材料制成的自行车、快艇、球拍、钓鱼杆、撑杆跳杆、玻璃钢桥、管道、冷却塔等。

## 1.2 复合材料及其分类

**复合材料**是两种或两种以上不同性能的材料在宏观尺度上组成的多相材料,或者更概括地说,复合材料是由两个或两个以上独立的物理相所组成的**固体材料**。

通常,将复合材料中一个比较连续的相称为**基体**,其他相则称为**增强**。玻璃钢就是以玻璃纤维为增强、某种塑料为基体的复合材料。各相材料的物理性质总称为**相物理**,各相材料的几何形状及其分布总称为**相几何**。改变相物理(如更换某一相材料)、相几何可获得各种性能(力学的、光学的、电磁学的、热学的,等等)的复合材料,以满足使用要求。

粗略地看,复合材料的性能是其各相材料的性能取长补短、共同作用的结果(某种平均作用——"混合效应")。实际上未必如此,尤其是对有关破坏问题,还有"协同效应"。例如,某些复合材料可获得其组分单独使用时所没有的潜在性能。断裂能为 7 N/m 的玻璃纤维与断裂能为 220.5 N/m 的塑料组成的复合材料,其断裂能大约为 175 kN/m,是其组分单独使用时的上千倍! 其原因也许是两种相材料的交界面起着重要的作用。这种交界面通常称之为**界面**。界面性能是影响复合材料性能的一个重要因素,对分析破坏现象起着重要的作用,必须专门研究,如有可能,可在工艺、实验或力学模型中加以顾及。

复合材料按其性能和用途可分为:功能复合材料和结构复合材料。前者利用其某些特有的物理性能(如耐烧蚀材料、无线电波可穿透材料等),后者则是作为承力的结构材料使用的。本书仅研究后者,但就研究方法而言,两者有许多共同之处。

复合材料也可按基体或增强来分类。

(1) 按基体材料分类

1) 聚合物基复合材料;

2) 金属基复合材料;

3) 陶瓷基复合材料;

4) 橡胶基复合材料。

(2) 按增强材料分类

1) 纤维增强复合材料;

2）短切纤维增强复合材料；

3）晶须增强复合材料；

4）颗粒增强复合材料；

5）片状增强复合材料。

纤维增强复合材料是指连续长纤维增强复合材料(还可按纤维的方向性分为单向、双向、三向和随机方向增强复合材料)，是结构用复合材料，可以是纤维或纤维束增强，也可以是织物增强。由两种或两种以上纤维共同增强同一树脂基体的复合材料则称之为**混杂纤维复合材料**。而短切纤维增强复合材料是指短纤维增强复合材料，如模压复合材料(SMC)和捏塑复合材料 (DMC)。

以上说明和分类不是绝对的。例如，对于多晶体，通常视为传统材料，但也可视为复合材料。前者只是在宏观层次内进行研究；后者就需要考虑其细观结构，在细观和宏观两个层次内进行研究，且其宏观性能可通过细观理论分析得到。因此，后者比前者更深刻。例如，以橡胶颗粒去增韧聚苯乙烯，在弥散过程中，聚苯乙烯颗粒又将渗入橡胶颗粒内。这种材料可称为基体模糊的复合材料。此外，还有相互贯穿网状复合材料，它的每一相都是连续的；基体和纤维采用同一物质构成的复合材料，如碳-碳复合材料。目前还正在研制自增强分子复合材料、智能复合材料和纳米复合材料。这些复合材料都没有列入上述分类中。

复合材料中各相材料的性能一般应有明显的差别，每相材料也应有相当的分量，不宜太少，以组成性能与相材料有显著差别的复合材料。

## 1.3 复合材料叠层结构

纤维增强复合材料是由纤维与基体两种组分材料组成的，两者具有明显的界面。两种材料复合成的单层材料称为**单层板**，实际上就是一个结构层次。其力学性能决定于组分材料的力学、几何(形状、分布、含量等)特性和纤维/基体界面的性能。而各单层板可以用不同的方式叠合成**叠层板**，称为**叠层结构**，叠层结构是目前结构复合材料的主要形式，其力学性能取决于叠层板的力学性能和结构的几何(叠层厚度、铺叠方向、铺叠顺序等)特性。

为了对纤维增强叠层材料进行力学分析，了解其制作过程是非常必要的。增强纤维有多种形式，如单丝、无捻粗纱、线纱，以及它们的织物、短切纤维毡、晶须等。受力较明确和效率较高者是单丝或无捻粗纱按预定方式排列的增强形式。纤维增强树脂基复合材料的制作，主要有**干法**和**湿法**两种形式。

1. 干法

先将纤维排成$(1\sim3)\times10^{-2}$m 的平行纤维带，再通过黏性液态树脂，将此树脂浸渍的平行纤维带稍加温，使树脂处于半熔阶段，而制成所谓的**预浸带**(样子就像市场上包装重物箱、商品箱用的玻璃纤维增强蜡封带)，预浸带是制作叠层板材的

中间半成品。当然，也可以制成更宽些的预浸带。将预浸带切成所需长度，沿一个方向铺成一个单层，在此单层上，又沿某个设计方向铺设第二单层，如此铺设下去，直到所需层数(可至上百层)为止，这样便形成了叠层板的初形。此操作称为铺层。将初形置入热压罐里慢慢加热并抽出残留的气泡和挥发物。随着温度的增加，树脂会重新软化、流动，直到形成聚合物分子的交联链而开始固化。对于环氧树脂，此阶段的温度约为 135℃，压力约为 590kPa，历时约 1h；然后再增加温度至 177℃并保持 1～2h，以完成固化；最后降至室温，便完成了叠层板的制作。因为大部分交联链是在最高温度下形成的，故将最高温度定为固化温度。固化温度下的叠层板可视为处于无应力自然状态。

2. 湿法

在湿法制作过程中，不经过中间半成品预浸带阶段，而是直接将树脂浸渍的纤维一层层地绕成所需要的结构形状，然后整体固化。例如火箭的叠层筒体。

叠层板是若干单层板以不同方向铺叠而成的。如果各单层板均以同一方向进行铺叠则称为**单向叠层板**；以不同方向进行铺叠则称为**多向叠层板**。若各单层板的铺叠方向相对于叠层板的几何中面是镜面对称的，也就是说，从中面向上或向下观察各单层的铺设方向，铺设顺序是相同的，这样的叠层板则称为**对称叠层板**(几何和物理特性以几何中面为对称面的叠层板)。若各单层板的铺叠方向相对于叠层板的几何中面是镜面反对称的，则称为**反对称叠层板**。若各单层板均是以顺纤维和垂直于纤维方向进行铺设的叠层板则称为**正交叠层板**。若面内刚度特性可近似用两个等效工程常数表示的叠层板则称为**准各向同性叠层板**。若在几何中面一侧正、负铺设角铺层数相等的叠层板则称为**均衡叠层板**。

为了充分利用材料和减轻质量，可用两块薄的叠层做面板，中间的芯部材料采用轻质填料或蜂窝结构。这种材料称为**夹层(芯)复合材料**。

## 1.4 纤维增强复合材料的性能特点

纤维增强复合材料是制作复合材料结构件的主要材料。高强度、高模量纤维是理想的承载体。就纤维本身而言，通常仅能承受拉伸荷载。纤维与基体复合后，基体提供了一个连续的介质，既保持了纤维的铺设方向，又从结构上保证了纤维的荷载传递，还能使纤维承受压缩和剪切荷载。此外，基体在纤维间起着分散和传递荷载的作用，也提高了纤维沿纤维方向的承载能力。总之，复合材料可以克服其组分材料的弱点，发挥其综合性能。

复合材料的优越性，在于它能实现设计材料的要求。由于复合材料是**两层次材料**(即从力学的观点来看，需要在细观和宏观两个层次内进行理论分析的材料。这是复合材料与传统材料关键性的区别，传统材料通常只需要在宏观层次内进行理论分析)，它的宏观性能可根据人们的需要通过细观性能来设计，因此可以充分发

挥材料的潜力。现阶段使用的复合材料主要有下列 6 项性能特点。

1. 比强度、比模量高

**比强度**是复合材料拉伸**强度**与**密度**之比，**比模量**是**模量**与**密度**之比。这两个数据愈大，似乎可以说明材料既轻且**强度**和**刚度**愈高，其实这种说法是不全面的，这两个数据只不过是说明了沿纤维方向受拉的优越性而已，如有偏离纤维方向的力存在，这两个数据就不能说明问题了。因为在偏离纤维方向，这种材料的性能是很差的。因此在多向受力的情况下，为了发挥复合材料的优越性，纤维不能沿单一方向铺设。

就上述这两个数据而言，碳纤维 T300/环氧 5208 的比强度是铝的 6.3 倍，比刚度是铝的 4.16 倍。目前在航空工业中使用的结构复合材料，主要还是利用它的高比刚度，例如用来制作飞机的尾翼和安定面等。至于比强度，由于现阶段材料的强度数据较为分散，兼之使用经验还不充分，因此用复合材料做飞机结构的主要受力件还有些顾虑。必须进一步改进材料工艺，通过提高制作水平、积累经验并提高强度分析的理论水平，以期更有效地发挥复合材料的优越性。

2. 抗疲劳性能好

复合材料的疲劳破坏机制与金属等均匀材料完全不同。金属材料往往出现单一的疲劳主裂纹，主裂纹控制着最终的疲劳破坏。而复合材料往往在高应力区出现大量的损伤(如界面脱胶、基体开裂、层间脱层和纤维断裂等)，并与材料种类、铺层方式、疲劳荷载类型有关，破坏机制较复杂。单向复合材料一般具有较好的拉-拉疲劳性能，且有明显的破坏预兆。至于其他形式的材料，也可期望做出好的材料设计，以承受各种类型的破裂荷载。

3. 减振性能好

结构的固有频率，除与结构的形状有关外，还与材料的比模量的平方根成正比。由于复合材料的比刚度大，故其自振频率甚高，可避免早期共振。此外，复合材料还具吸振能力强、振动阻尼(内摩擦)大的特点，一旦激起振动，衰减也快。由实验得知，轻金属合金梁需 9s 才停止振动，而同样尺寸的碳纤维复合材料梁只需 2.5s 就停止了振动。

4. 抗高、低温性能好和膨胀系数小

目前，人们可以根据不同的工作环境，选择抗高、低温性能良好和膨胀系数小的复合材料。例如，用碳纤维/环氧制成的飞行器，在太空飞行时，向阳面与背阳面有着 260℃的温差，它仍可保持形状不变。此类材料也是制造太空飞行用的光学望远镜、空间站、太阳能集光板和各种航天兵器的良好材料。此外，复合材料是一种很好的烧蚀材料，已被成功地用于洲际导弹和飞船外壳。一般铝合金在 400℃时，弹性模量将大幅度下降并接近于零，强度也显著下降。而硼纤维/钛合金复合材料在此温度下强度与刚度基本上保持不变。复合材料还具有较高的低温强度、低温韧性和较好的低温疲劳性能。

5. 破损安全性好

复合材料本身是**多度静不定结构**，可以多通道受载，其中个别纤维断裂（只要不超过一定的限度）仍能安全使用，或安全使用一定期限。这种安全地承受一定损伤的能力称为破损安全性。复合材料具有较好的破损安全性。

6. 成型工艺好

复合材料易于成型为各种复杂的零部件，并且可以一次成型，从而减少加工工序和节省原材料。此外，复合材料还有许多其他的独特性能。例如，可按最优方式设计材料、制造工艺简单、加工消耗量少。某些复合材料还有其他一些特殊的优越性能，如抗腐蚀、耐磨损、抗冲击，以及具有所要求的电绝缘性、电磁波穿透性、导热性、隔热性、耐高低温性等。由于复合材料具有上述种种优越性能，故用传统材料无法解决的问题，现在有可能用复合材料来实现，因此，复合材料愈来愈被人们所重视。

复合材料虽有很多优越性，但作为一种新型材料，仍然存在许多问题和缺点。最主要的还是对这种新型材料的认识尚不深刻，其中包括新材料的研制、质量检验与控制、大规模生产、材料数据、加工性能、经济效益、环境保护、理论水平及长期积累起来的工程经验等。

## 1.5 研究复合材料强度与破坏的内容与方法

为了能够充分开发和利用纤维复合材料的潜在性能，正确地进行材料设计，首先应该了解复合材料的破坏机制及其影响因素。复合材料的**强度**和**破坏**，与组分、界面及其随机缺陷密切相关，尚无确切的力学模型和相应的协同律。纤维与基体复合，通常具有所谓的**复合效应**。复合材料的**复合效应**包括**混合效应**（如有效模量和湿热膨胀系数等的各种**混合律**）与**协同效应**。对于强度问题，往往是协同效应起作用。纤维及复合材料的强度本身就不是材料常数，而是具有**就位性**（*in situ* property）——不同部位、不同场合其表现不同，并可发挥其潜在性能的作用。由于匹配、工艺不同，界面和基体也可严重影响复合材料的宏观强度性能。**界面剥离**（脱粘）、**基体破坏**、**层间脱层**等这些局部损伤都是影响复合材料结构过早失效、破坏的因素，这些因素的交错存在使其破坏过程较长而复杂。目前，关于这些问题的研究在国内外已有许多文献报道，但尚无较为统一的**力学分析模型**和相应的**强度破坏准则**。

研究复合材料的强度和破坏，可以分为**细观强度分析**和**宏观强度分析**两大部分。根据相材料的强度性能从理论上导出复合材料的基本强度参数（主要是沿轴强度），是目前细观强度分析的中心问题。这一问题的研究，只能凭借**细观力学**，最有效的仍是**细观随机（统计）理论**，也可结合断裂力学方法进行研究。对复合材料细观应力重新分布的计算多采用**剪切滞后分析**（shear-lag analysis）、**有限单元法**、**弹塑**

**性力学**等，对其强度和断裂（或破坏过程）的研究几乎都基于**统计断裂模型**（如**链式统计模型**、**随机扩大临界核统计模型**等）。复合材料的宏观强度理论是沿着材料力学中的**强度理论**的基本思路，经修改扩充而形成的。其基本出发点是物体中一点的强度由该点的应力状态（或应变状态）所确定。目前常用的强度理论有**最大应力理论**、**最大应变理论**、**Tsai-Hill 理论**、**Tsai-Wu 张量理论**等，主要涉及**失效判据**和**强度指标**两大问题。本书着重讨论复合材料的细观应力重新分布及其统计破坏问题。

## 思 考 题

1.1 何谓复合材料？

1.2 何谓材料力学？何谓高等材料力学？何谓复合材料力学？

1.3 复合材料有哪些优越性？

1.4 研究复合材料的强度和破坏，可以分为哪几个部分？各部分主要涉及哪些问题？各采用哪些主要方法进行解决？

# 第二章　单向复合材料的细观应力集中

本章的主要任务是研究单向纤维增强复合材料在纵向拉伸荷载作用下由纤维断裂、基体破坏或纤维/基体界面损伤所导致的细观应力重新分布问题。对于大多数树脂基复合材料，由于基体的拉伸模量相对较小，因此，此类问题宜采用剪滞假定进行研究。也就是只考虑纤维横截面上的拉力（应力），不考虑基体拉力，即认为基体所承受的应力很小，可以忽略不计。本章主要介绍了 Hedgepeth 的剪滞理论、动应力集中问题、各种修正的简化剪滞模型、基体破坏或纤维/基体界面损伤对应力集中的影响、计及基体拉力的剪滞分析等。最后，简要介绍了有关上述问题的国内外研究进展。

## 2.1　剪滞理论

### 2.1.1　概述

单向纤维增强复合材料的纵向拉伸，其破坏往往始于某些“弱”纤维（带缺陷纤维）。当一根或数根纤维断裂而形成裂纹后，在其周围产生局部应力扰动，邻近纤维与基体受此扰动而造成**应力集中**，这些应力集中的大小和影响范围对研究复合材料的力学行为是十分重要的，也是复合材料统计破坏理论的重要参数。近几十年来，对这个问题的研究从不同角度一直在进行着，但难于得到精确解。因复合材料的边缘或缺口附近会出现分层、脱胶、纤维伸缩和摩擦等复杂现象，现有的 3D 有限元的计算能力也仅能处理纤维含量极少的情形。用含裂纹的均匀各向异性等效体来替换复合材料的宏观方法，也很难应用，因为这种等效是有条件的，在裂纹附近不具备这个条件。较合理的是采用剪切滞后（shear-lag）分析来计算**应力重新分布**。

基于简化假定的剪切滞后方法（简称**剪滞方法**），通常可以较好地揭示相当复杂问题的物理现象。剪滞方法是建立一种计及影响断裂的主要因素的简化模型来分析复合材料的断裂性能。它类似于结构工程师解决复杂结构力学问题所应用的方法。并不试图详细求解三维应力分布，而是考虑结构的主要特点，构造一个数学模型，用来计算结构对荷载的响应。

剪滞分析的突出优点是大大简化了分析，但这又往往仅能给断裂现象提供一个定性的描述。它的成功应用在于对试验现象的观察和同实验数据的比较。即使

如此，它为发展新材料、解释实验数据以及为设计损伤容限更好的结构提供方向性的指导等方面仍是有意义的。

Hedgepeth(1961)首次采用剪滞方法处理单向复合材料的多根纤维断裂问题，并将此方法进行推广，研究了**基体的塑性效应**和**界面脱胶**条件。这种方法的主要假定是

1) 所有位移是平行于纤维的。

2) 纤维只受拉力作用。

3) 基体仅传递剪力，不承受拉力。

下面首先给出单根纤维断裂模型，以说明剪滞方法的基本原理和单向复合材料应力重新分布的性质。然后介绍多根纤维断裂问题的详细求解。

### 2.1.2 单根纤维的断裂

图 2.1 所示为含有 3 根等间距平行排列的纤维，其中间的那根已发生断裂的分析模型。此模型也可看作为由 3 层单向层板同方向叠合而成的单向叠层板，其中间层已发生断裂的情形。根据对称性，仅需考虑模型的一半即可。纤维编号用 $n=1,2$ 表示。画出微段受力图(见图 2.2)，列出其力的平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}p_1(x)}{\mathrm{d}x}+\tau_1(x)=0\\ \frac{\mathrm{d}p_2(x)}{\mathrm{d}x}-\tau_1(x)=0\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

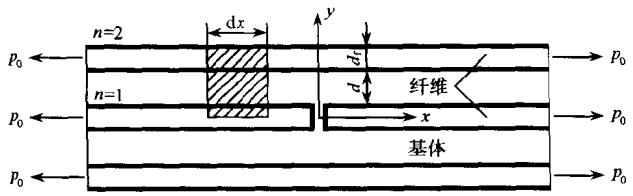



图 2.1 单根纤维断裂的剪滞分析模型

式中，$p_1(x)$和 $p_2(x)$表示单位厚度的纤维轴向拉力；$\tau_1(x)$为基体切应力。令第 $n$ 号纤维的位移为 $u_n(x)$，于是有

$$\left.\begin{aligned}p_n(x)&=E_{\mathrm{f}}d_{\mathrm{f}}\frac{\mathrm{d}u_n(x)}{\mathrm{d}x},\quad n=1,2\\ \tau_1(x)&=\frac{G_{\mathrm{m}}}{d}[u_2(x)-u_1(x)]\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

式中，$E_{\mathrm{f}}$ 和 $d_{\mathrm{f}}$ 分别为纤维弹性模量和直径(或单层厚度)；$d$ 为纤维间距；$G_{\mathrm{m}}$ 为基体切变模量。引进下列无量纲参数：

$$\xi=x/d_{\mathrm{f}},\quad \alpha=E_{\mathrm{f}}d/(G_{\mathrm{m}}d_{\mathrm{f}}) \tag{2.3}$$

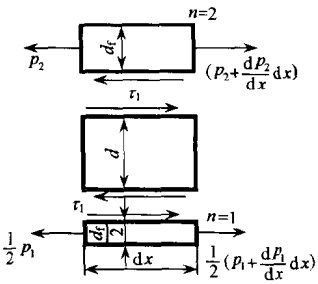



图 2.2 微段受力图

将式(2.2)和式(2.3)代入式(2.1),有

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\alpha\frac{d^2u_1}{d\xi^2}+u_2-u_1=0\\ \alpha\frac{d^2u_2}{d\xi^2}+u_1-u_2=0\end{aligned}\right\}\tag{2.4}$$

由式(2.4)的第1式,有

$$u_2=u_1-\frac{1}{2}\alpha\frac{d^2u_1}{d\xi^2}\tag{2.5}$$

将式(2.5)代入式(2.4)的第2式,得

$$\frac{d^4u_1}{d\xi^4}-\frac{3}{\alpha}\frac{d^2u_1}{d\xi^2}=0\tag{2.6}$$

上式的通解为

$$u_1=A+B\xi+Ce^{\lambda\xi}+De^{-\lambda\xi}\tag{2.7}$$

式中,$\lambda=\sqrt{3/\alpha}$;$A$、$B$、$C$ 和 $D$ 为积分常数。将上式代入式(2.5),有

$$u_2=A+B\xi-\frac{1}{2}Ce^{\lambda\xi}-\frac{1}{2}De^{-\lambda\xi}\tag{2.8}$$

式(2.7)和式(2.8)中的积分常数可由式(2.2)的第1式及下述的边界条件确定

$$u_2|_{\xi=0}=0,\quad p_1|_{\xi=0}=0,\quad p_1|_{\xi=\infty}=p_2|_{\xi=\infty}=p_0\tag{2.9}$$

由此可得纤维位移和轴向拉力

$$\left.\begin{aligned}u_1&=\frac{p_0}{E_f}\left(\frac{1}{2\lambda}+\xi+\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda\xi}\right)\\ u_2&=\frac{p_0}{E_f}\left(\frac{1}{2\lambda}+\xi-\frac{1}{2\lambda}e^{-\lambda\xi}\right)\end{aligned}\right\}\tag{2.10}$$

$$\left.\begin{aligned}p_1&=p_0(1-e^{-\lambda\xi})\\ p_2&=p_0\left(1+\frac{1}{2}e^{-\lambda\xi}\right)\end{aligned}\right\}\tag{2.11}$$

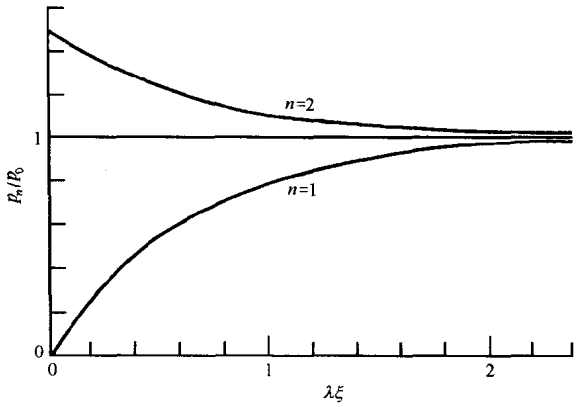



图 2.3 $p_1$ 和 $p_2$ 与 $\lambda\xi$ 的关系曲线

图 2.3 示出了 $p_1$ 和 $p_2$ 与 $\lambda\xi$ 的关系曲线。求得的应力集中因子 $(p_2/p_0)|_{\xi=0}=1.5$。由式(2.10)和式(2.11)可知，纤维位移和轴向拉力的分布是材料常数 $\lambda$ 的函数，但应力集中因子却与 $\lambda$ 无关。

上述方法可以推广应用于含多根纤维断裂的有限宽单向复合材料的断裂分析。

### 2.1.3 多根纤维断裂

关于含多根纤维断裂的有限宽单向复合材料的断裂问题，Hikami 和 Chou (1990) 进行了研究，注意力主要集中于裂纹邻近的纤维应力集中因子。采用二维剪滞方法，分析了两种荷载条件下的应力重新分布问题：

1) 各纤维远处均承受均匀拉力 $p$ 作用(见图 2.4)。

2) 一对集中力 $p$ 作用于裂纹面上的 $n=b-a$ 号特定纤维(见图 2.5)。

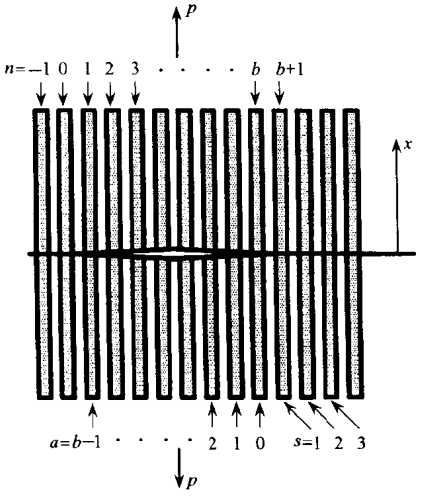



图 2.4 含多根纤维断裂的剪滞分析模型(各纤维远处均承受均匀拉力 $p$ 作用)

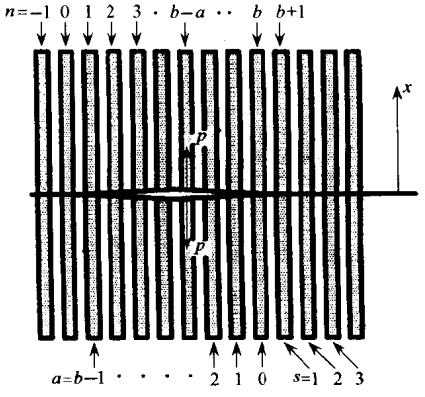



图 2.5 含多根纤维断裂的剪滞分析模型(一对集中力 $p$ 作用于裂纹面上的 $n=b-a$ 号特定纤维)

Hikami 和 Chou 的分析具有独特性，其独特之处是：对于荷载条件 1，利用勒让德多项式，可以获得弹性场控制方程的通解，基于这个解答，可以导出全部纤维应力集中因子的闭合解的表达式。因为荷载条件 1 和条件 2 的影响函数矩阵之间存在某种互逆关系，所以，荷载条件 2 的解答极易从荷载条件 1 的解答中导出。

考虑在横向含有狭长裂纹(含 $b$ 根断纤维)的二维单向连续纤维复合材料(见图 2.4)，沿纤维方向的坐标轴是 $x$，断裂纤维由左至右进行编号，用 $n=1,2,\cdots,b$ 表示。

设第 $n$ 根纤维在 $x$ 处的沿 $x$ 方向的位移为 $u_n(x)$，该处截面上单位厚度的拉力为 $p_n(x)$，则

$$p_n(x) = E_f d_f \frac{du_n(x)}{dx} \tag{2.12}$$

采用剪滞分析的假定，基体材料仅传递剪力。若令 $s_n(x)$ 为第 $n$ 根和第 $n+1$ 根纤维之间单位长度上的剪切(应)力，则

$$s_n(x) = \frac{G_m}{d}[u_{n+1}(x) - u_n(x)] \tag{2.13}$$

沿 $x$ 方向力的平衡有

$$\frac{dp_n}{dx} + s_n - s_{n-1} = 0 \tag{2.14}$$

将式(2.12)和式(2.13)代入式(2.14)有

$$E_f d_f \frac{d^2u_n}{dx^2} + \frac{G_m}{d}(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) = 0 \tag{2.15}$$

上式即为剪滞分析模型的**控制方程**。

对于荷载条件 1，边界条件是

$$\left.\begin{aligned} &p_n(0) = 0, \quad 1 \leqslant n \leqslant b \\ &u_n(0) = 0, \quad n \leqslant 0, \quad n \geqslant b+1 \\ &p_n(\pm\infty) = p, \quad \text{所有纤维} \end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

对于荷载条件 2，边界条件为

$$\left.\begin{aligned} &p_n(0) = 0, \quad n = 1,2,\cdots,b-a-1,b-a+1,\cdots,b \\ &u_n(0) = 0, \quad n \leqslant 0, \quad n \geqslant b+1 \\ &p_n(\pm\infty) = 0, \quad \text{所有纤维} \\ &p_{b-a}(0) = -p \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

式(2.15)～(2.17)就是所要求解的**混合边值问题**。为求解方便，需引入无量纲参数。

无量纲化的轴向拉力、位移及坐标分别由下式给出

$$\left.\begin{aligned} &F_n(\xi) = p_n(x)/p \\ &U_n(\xi) = u_n(x)\sqrt{E_f G_m d_f/d}/p \\ &\xi = x\sqrt{G_m/(E_f d_f d)} \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

式(2.15)可简化为

$$\frac{d^2U_n}{d\xi^2} + U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1} = 0 \tag{2.19}$$

荷载条件 1 的无量纲边界条件是

$$\left.\begin{aligned} &F_n(0) = 0, \quad 1 \leqslant n \leqslant b \\ &U_n(0) = 0, \quad n \leqslant 0, \quad n \geqslant b+1 \\ &F_n(\pm\infty) = p, \quad \text{所有纤维} \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

荷载条件 2 的无量纲边界条件为

$$\left.\begin{aligned} &F_n(0)=0,\quad n=1,2,\cdots,b-a-1,b-a+1,\cdots,b\\ &U_n(0)=0,\quad n\leqslant 0,\quad n\geqslant b+1\\ &F_n(\pm\infty)=0,\quad \text{所有纤维}\\ &F_{b-a}(0)=-1 \end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

采用勒让德多项式和傅里叶变换，可以求得多根纤维断裂问题的通解，同时可以获得所有完整纤维在 $\xi=0$ 处的应力集中因子的闭合解。对于荷载条件 1，含有 $b$ 根断纤维的裂纹顶端第 $s$ 根完整纤维的应力集中因子由下式给出

$$K_b^s=(b+2s-1)\frac{2s(2s+2)(2s+4)\cdots(2s+2b-2)}{(2s-1)(2s+1)(2s+3)\cdots(2s+2b-3)(2s+2b-1)} \tag{2.22}$$

图 2.6 示出了 $K_b^s$ 的计算结果。裂纹顶端紧邻的完整纤维（$s=1$）的应力集中因子可由上式直接推得

$$K_b^1=\frac{4\times 6\times 8\times\cdots\times(2b+2)}{3\times 5\times 7\times\cdots\times(2b+1)} \tag{2.23}$$

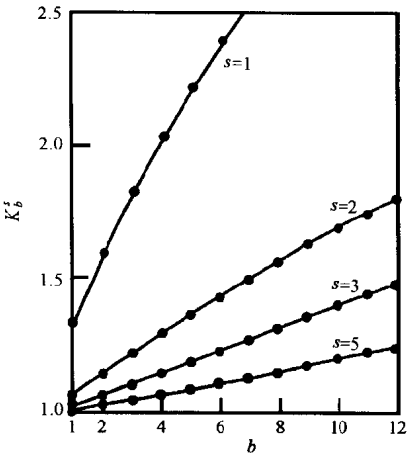



图 2.6 $K_b^s$ 随 $b$ 的变化趋势

最大的切应力集中发生在裂纹顶端的基体中，因此，裂纹顶端的无量纲位移 $U_b(0)$ 即为最大的切应力集中因子 $S_{b/(b+1)}$，其解答为

$$S_{b/(b+1)}=\frac{\pi(2b-1)!}{2^{2b}[(b-1)!]^2} \tag{2.24}$$

对于荷载条件 2（见图 2.5），Hikami 和 Chou（1990）假定一对单位集中力作用于第 $b-a$ 号纤维，然后求得裂纹顶端第 $s$ 根完整纤维的应力集中因子为

$$K_b^{s,a}=\frac{1}{2}\times\frac{(2a+1)!!(2b-2a-1)!!(2s-3)!!(2s+2b-2)!!}{(2a)!!(2b-2a-2)!!(2s-2)!!(2s+2b-1)!!}\times\frac{1}{s+a} \tag{2.25}$$

式中，符号 !! 表示双阶乘（即 $n!!=(n!)!$）。最大的应力集中发生在裂纹顶端紧邻的完整纤维（$s=1$）中，其结果为

$$K_b^{1,a}=\frac{(2a+1)!!(2b-2a-1)!!(2b)!!}{(2a+2)!!(2b-2a-2)!!(2b+1)!!} \tag{2.26}$$

图 2.7 示出了 $K_b^{1,a}$ 的计算结果。对于有若干对集中力作用于裂纹面上的更一般情形，可由简单问题的线性组合求得。

若为半无限长裂纹，当一对单位集中力作用于第 $a$ 号纤维时，裂纹顶端第 $s$ 根完整纤维的应力集中因子是

$$\lim_{b\to\infty} K_b^{s,a} = \frac{1}{2(s+a)} \times \frac{(2s+1)!!}{(2a)!!} \times \frac{(2s-3)!!}{(2s-2)!!} \tag{2.27}$$

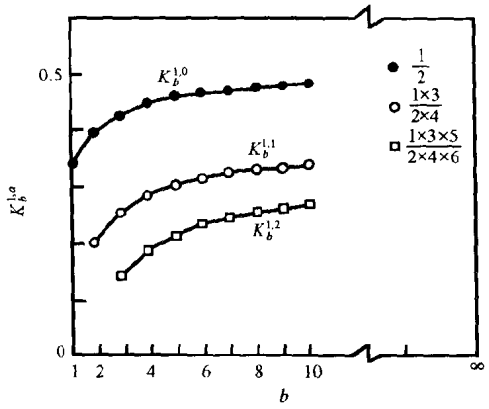



图 2.7 $K_b^{1,a}$ 随 $b$ 的变化趋势

### 2.1.4 Hedgepeth 剪滞模型

Hedgepeth(1961)首次采用剪滞方法研究含 $b$ 根纤维断裂的无限宽单向复合材料的断裂问题。从假定纤维仅承担拉力，基体只承担剪力出发，将一排等间距 $d$ 排列的纤维编号见图 2.8。设 $A_f$ 和 $d_f$ 分别为纤维截面面积和直径，$h$ 为单层板厚度，其他符号的意义如前所述。若在远处每根纤维均作用有均匀拉力 $p$，则第 $n$ 号纤维在 $x$ 截面上承受的轴向拉力和位移分别为 $p_n(x)$和 $u_n(x)$，其轴向应变为 $\mathrm{d}u_n(x)/\mathrm{d}x$。考虑到大多数纤维均为线弹性材料，故力与位移的物理关系为

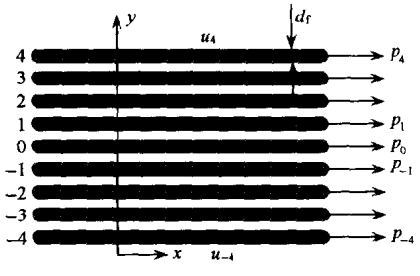



图 2.8 Hedgepeth 剪滞分析模型

$$p_n(x) = E_f A_f \frac{\mathrm{d}u_n(x)}{\mathrm{d}x}, \quad -\infty < n < +\infty \tag{2.28}$$

基体剪切力也可通过纤维位移表达，若令 $s_n(x)$为第 $n$ 根和第 $n+1$ 根纤维之间单位长度上的剪切力，则

$$s_n(x) = \frac{G_m h}{d}[u_{n+1}(x) - u_n(x)], \quad -\infty < n < +\infty \tag{2.29}$$

由此可列出纤维微段的剪滞平衡方程为

$$E_f A_f \frac{\mathrm{d}^2 u_n}{\mathrm{d}x^2} + \frac{G_m h}{d}(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) = 0, \quad -\infty < n < +\infty \tag{2.30}$$

现假定 0,1,2,…,$b-1$ 号纤维都在 $x=0$ 处断了，由于已断纤维在 $x=0$ 处受力为零，未断纤维在 $x=0$ 处轴向位移为零，各纤维在 $x=\infty$处均受外力 $p$ 作用，则

式(2.30)求解的边界条件是

$$\left.\begin{aligned} &p_n(0)=0, \quad 0\leqslant n\leqslant b-1\\ &u_n(0)=0, \quad n<0, \quad n\geqslant b\\ &p_n(\pm\infty)=p, \quad -\infty<n<+\infty \end{aligned}\right\} \tag{2.31}$$

兹采用如下无量纲参数：

$$\left.\begin{aligned} &F_n(\xi)=p_n(x)/p\\ &U_n(\xi)=u_n(x)\sqrt{E_fG_mA_fh/d}/p\\ &S_n(\xi)=s_n(x)\sqrt{E_fA_fd/(G_mh)}/p\\ &\xi=x\sqrt{G_mh/(E_fA_fd)} \end{aligned}\right\} \tag{2.32}$$

这时式(2.30)化为

$$\frac{d^2U_n}{d\xi^2}+U_{n+1}-2U_n+U_{n-1}=0 \tag{2.33}$$

此外还有

$$F_n(\xi)=\frac{dU_n(\xi)}{d\xi}, \quad S_n(\xi)=U_{n+1}(\xi)-U_n(\xi) \tag{2.34}$$

边界条件式(2.31)则化为

$$\left.\begin{aligned} &F_n(0)=0, \quad 0\leqslant n\leqslant b-1\\ &U_n(0)=0, \quad n<0, \quad n\geqslant b\\ &F_n(\pm\infty)=1, \quad -\infty<n<+\infty \end{aligned}\right\} \tag{2.35}$$

这样，问题简化成**混合边值问题**，如式(2.33)～(2.35)。Hedgepeth 采用影响函数进行求解。

假定图 2.8 所示单向复合材料中，仅 0 号纤维在 $\xi=0$ 处发生断裂，并且设在 $\xi=0$ 处沿 $\xi$ 方向产生单位位移 $V_0(0)=1$，无穷远处的全部外荷载为零，则此时在第 $n$ 号纤维的 $\xi$ 处产生位移 $V_n(\xi)$，此即**影响函数**。显然，这时决定 $V_n(\xi)$ 的方程式是

$$\frac{d^2V_n}{d\xi^2}+V_{n+1}-2V_n+V_{n-1}=0 \tag{2.36}$$

边界条件是

$$\left.\begin{aligned} &V_n(0)=1, \quad n=0\\ &V_n(0)=0, \quad n\neq 0\\ &L_n(\pm\infty)=1, \quad -\infty<n<+\infty \end{aligned}\right\} \tag{2.37}$$

式中

$$L_n(\xi)=\frac{dV_n(\xi)}{d\xi} \tag{2.38}$$

为第 $n$ 号纤维所受的力，也称为影响函数。为求上述边值问题，引入下列傅里叶变换

$$\overline{V}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}V_n e^{-in\theta} \tag{2.39}$$

其中，$i=\sqrt{-1}$，而

$$V_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\overline{V}e^{in\theta}d\theta \tag{2.40}$$

式(2.36)$\times e^{in\theta}$，并对所有的 $n$ 求和，则式(2.36)和式(2.37)成为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\overline{V}}{d\xi^2}-\alpha^2\overline{V}=0\\&\overline{V}(0,\theta)=1\\&\frac{d\overline{V}(\infty,\theta)}{d\xi}=0\end{aligned}\right\} \tag{2.41}$$

式中 $\alpha^2=2(1-\cos\theta)$。显然满足上述边值问题的解是

$$\overline{V}=e^{-\alpha\xi} \tag{2.42}$$

利用式(2.40)，则原问题式(2.36)和式(2.37)的解为

$$V_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{-\alpha\xi}e^{in\theta}d\theta \tag{2.43}$$

注意到 $\alpha^2=2(1-\cos\theta)$ 及 $e^{in\theta}=\cos n\theta+i\sin n\theta$，可知式(2.43)的被积函数中一部分是 $\theta$ 的奇函数，另一部分是 $\theta$ 的偶函数，于是影响函数

$$\begin{aligned}V_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{-\sqrt{2(1-\cos\theta)}\xi}\cos n\theta d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{-2\xi\sin\theta/2}\cos n\theta d\theta\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^{-2\xi\sin\varphi}\cos 2n\varphi\, d\varphi\end{aligned} \tag{2.44}$$

由式(2.38)和式(2.44)求 $L_n(\xi)$，当 $\xi=0$ 时有

$$L_n(0)=\frac{4}{\pi(4n^2-1)} \tag{2.45}$$

现在再回到边值问题式(2.33)～(2.35)，即 0,1,2,…,$b-1$ 号纤维在 $x=0$ 处都有断口。如令各断纤维在断口处的位移为 $U_0(0),U_1(0),U_2(0),\cdots,U_{b-1}(0)$，则用叠加法可得出第 $n$ 根纤维上的力

$$F_n(\xi)=\frac{dU_n(\xi)}{d\xi}=1+\sum_{m=0}^{b-1}L_{n-m}(\xi)U_m(0) \tag{2.46}$$

可见，要求 $U_0(0),U_1(0),U_2(0),\cdots,U_{b-1}(0)$，须设式(2.46)在断口处受力为零，即

$$0=1+\sum_{m=0}^{b-1}L_{n-m}(0)U_m(0) \tag{2.47}$$

如就每一断口列一个方程，即上式中令 $n=0,1,2,\cdots,b-1$，则得到一个联立方程组，可求得 $U_0(0),U_1(0),U_2(0),\cdots,U_{b-1}(0)$。

此外，按式(2.46)积分得位移

$$U_n(\xi)=\xi+\sum_{m=0}^{b-1}V_{n-m}(\xi)U_m(0) \tag{2.48}$$

例如，仅 0 号纤维有断口，这时 1 和 −1 号两根纤维在 $\xi=0$ 处受力最大为 $F_1(0)=F_{-1}(0)$，可从式

$$F_0(0)=0=1+L_0(0)U_0(0) \quad 和 \quad F_1(0)=1+L_1(0)U_0(0)$$

得

$$F_1(0)=1-\frac{L_1(0)}{L_0(0)}=1.333$$

这就是 0 号纤维断裂时，邻近纤维的最大应力集中因子 $K_1$。

因此，当 0，1，2，…，$b-1$ 号纤维都在 $\xi=0$ 处发生断裂，纤维最大受力是 $F_b(0)=F_{-1}(0)$，按上述方法即可求得相应的应力集中因子 $K_1,K_2,\cdots,K_b$。Hedgepeth 检查 $b=1,2,\cdots,6$ 的计算结果后推断，应力集中因子可由下式表达

$$K_b=\frac{4\times 6\times 8\times\cdots\times(2b+2)}{3\times 5\times 7\times\cdots\times(2b+1)} \tag{2.49}$$

上述结果后来被 Hikami 和 Chou(1989)所证实，见式(2.23)。

最大的剪切力发生在 $\xi=0$ 处的 $b-1$ 号断纤维与 $b$ 号完整纤维之间的基体中。因此，最大的切应力集中因子 $S_{b-1/b}=U_{b-1}(0)$。表 2.1 给出了当 $b=1,2,\cdots,6$ 时 $K_b$ 和 $S_{b-1/b}$的计算结果。

**表 2.1　$K_b$ 和 $S_{b-1/b}$的计算结果**

| $b$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $K_b$ | 1.333 | 1.600 | 1.829 | 2.030 | 2.219 | 2.390 |
| $S_{b-1/b}$ | 0.785 | 1.178 | 1.473 | 1.718 | 1.933 | 2.126 |

根据上述分析和计算结果，可以看出，连续断裂的纤维数愈多，则裂纹顶端紧邻的完整纤维及基体的应力集中因子愈大。

Hedgepeth 将上述方法推广到复合材料的横截面上纤维呈正方形排列的情形。这时，单根纤维的纵向剪滞平衡方程式比式(2.30)要复杂一些，因为它涉及该纤维和它前、后、左、右 4 根纤维的位移关系。对分布在同一横截面上任意矩形范围内的断裂纤维，或分布在任意圆周范围内的断裂纤维，求出了周围未断纤维的应力重新分布。仅一根纤维发生断裂时，最大应力集中因子为 1.146。

此方法还易推广到横截面上纤维呈六角形排列的情形。仅有一根纤维断裂，求断口附近纤维的轴向拉力和基体切应力是比较容易的，因为可以利用对称关系。例如，若在横截面正六角形中心的纤维发生断裂，则它周围六根未断纤维分别置于正六角形角点。如纤维纵向受力 $p(x)$，则有剪滞平衡方程

$$\frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x}=12\int_0^{\pi/d} r_f\tau(\theta,x)\mathrm{d}\theta \tag{2.50}$$

纤维应变

$$\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{p(x)}{\pi^2 r_f^2 E_f} \tag{2.51}$$

基体切应力

$$\tau(\theta,x) = G_m u(x)/d(\theta) \tag{2.52}$$

式中，$r_f$ 是纤维半径；$d(\theta)$是中心纤维与邻近纤维之间的间距。

$\theta<30°-\theta_1$ 时

$$d(\theta) = (2r_f + d)\cos\theta - r_f\left\{1 + \cos\left[\sin^{-1}\frac{(2r_f + d)\sin\theta}{r_f}\right]\right\} \tag{2.53a}$$

$\theta>30°-\theta_1$ 时

$$d(\theta) = (2r_f + d)\cos 30°\sec(30° - \theta) - r_f \tag{2.53b}$$

其中 $\theta_1$ 是从六角形中心向邻近两角顶纤维圆所作二切线的夹角。以上导出

$$\frac{d^2p(x)}{dx^2} - \beta^2 p(x) = 0 \tag{2.54}$$

其中

$$\beta^2 = \frac{12G_m}{\pi r_f^2 E_f}\int_0^{\pi/d}\frac{d\theta}{d(\theta)} \tag{2.55}$$

按 $x=0$ 处 $p(x)=0$，$x=\infty$处 $p(x)$为已知，易解出 $p(x)$和 $\tau(\theta,x)$。

## 2.2 单向复合材料的动应力集中

复合材料在荷载作用下，当纤维突然发生断裂时，为了恢复平衡，由断纤维所卸下的荷载必然通过基体传递给邻近的纤维，这种情形不仅可以产生静应力集中，而且在瞬时会产生**动应力集中**。Hedgepeth(1961)研究了图 2.8 所示的二维复合材料的动应力集中问题，仍然采用基于剪滞假定的分析模型。

下面简要给出求解动应力集中的基本方法。考虑一排等间距 $d$ 排列的纤维编号为 $n=-\infty$到 $n=\infty$的复合材料(见图 2.8)，取沿纤维方向的坐标为 $x$。在某一时刻 $t$，第 $n$ 根纤维在 $x$ 处的位移和轴向拉力分别用 $u_n(x,t)$和 $p_n(x,t)$表示，力与位移的关系为

$$p_n(x,t) = E_f A_f\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial x}, \quad -\infty<n<+\infty \tag{2.56}$$

由此可列出纤维微段的剪滞平衡方程

$$E_f A_f\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{G_m h}{d}(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) = m\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}, \quad -\infty<n<+\infty \tag{2.57}$$

式中，$m$ 为每单位长度的质量。

若 $0,1,2,\cdots,b-1$ 号纤维在 $x=0$ 处发生断裂，则相应的边界条件是

$$\left.\begin{aligned} &p_n(0,t) = 0, \quad 0\leqslant n\leqslant b-1\\ &u_n(0,t) = 0, \quad n<0, \quad n\geqslant b\\ &p_n(\pm\infty,t) = p, \quad -\infty<n<+\infty \end{aligned}\right\} \tag{2.58}$$

对于与时间有关的问题，尚需下列初始条件：

$$\left.\begin{aligned} &p_n(x,0)=p, \quad -\infty<n<+\infty \\ &\left.\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \quad -\infty<n<+\infty \end{aligned}\right\} \tag{2.59}$$

为了便于求解上述的边值问题，采用如下无量纲参数：

$$\left.\begin{aligned} &F_n(\xi,\tau)=p_n(x,t)/p \\ &U_n(\xi,\tau)=u_n(x,t)\sqrt{E_fG_mA_fh/d}/p \\ &\xi=x\sqrt{G_mh/(E_fA_fd)} \\ &\tau=t\sqrt{G_mh/(md)} \end{aligned}\right\} \tag{2.60}$$

这样，**控制偏微分方程**式(2.57)成为

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial \xi^2}+U_{n+1}-2U_n+U_{n-1}=\frac{\partial^2 U_n}{\partial \tau^2} \tag{2.61}$$

边界条件式(2.58)成为

$$\left.\begin{aligned} &F_n(0,\tau)=0, \quad 0\leqslant n\leqslant b-1 \\ &U_n(0,\tau)=0, \quad n<0, \quad n\geqslant b \\ &F_n(\pm\infty,\tau)=1, \quad -\infty<n<+\infty \end{aligned}\right\} \tag{2.62}$$

初始条件式(2.59)由下列关系

$$F_n(\xi,\tau)=\frac{\partial U_n(\xi,\tau)}{\partial \xi}$$

仅按位移项重新写出

$$\left.\begin{aligned} &U_n(\xi,0)=\xi, \quad -\infty<n<+\infty \\ &\left.\frac{\partial U_n(\xi,\tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}=0, \quad -\infty<n<+\infty \end{aligned}\right\} \tag{2.63}$$

对控制偏微分方程、边界条件及初始条件进行拉普拉斯变换，导出的方程形式上与 2.1.4 标题所讨论的静力情形类似，此处不再赘述。仅以 0 号纤维断裂为例，给出 1 和－1 号两纤维距离断口为 $\xi$ 处的动应力集中因子是

$$K_1(\xi,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C-i_\infty}^{C+i_\infty}K_1^*(\xi,S)e^{S\tau}dS \tag{2.64}$$

其中

$$K_1^*(\xi,S)=\frac{1}{S}\left[\frac{L_0^*(0,S)-L_1^*(\xi,S)}{L_0^*(0,S)}\right], \tag{2.65}$$

$$L_0^*(0,S)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}+S^2}\,d\theta, \tag{2.66}$$

$$L_1^*(\xi,S)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos\theta\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}+S^2}\exp\left(-\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}+S^2}\xi\right)d\theta \tag{2.67}$$

式(2.64)是由拉普拉斯反变换而导出的。

图 2.9 示出了断纤维数 $b=1,2$ 和 3 时的应力集中因子随时间变化的曲线。从

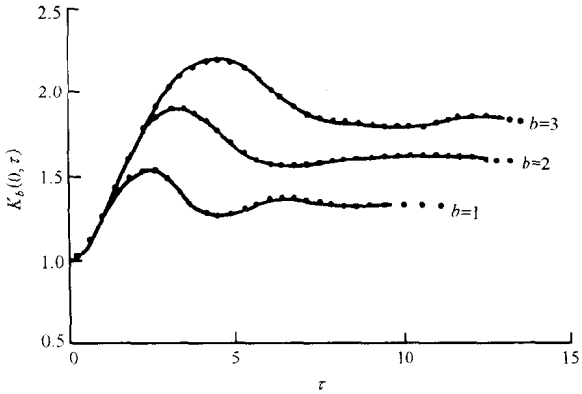



图 2.9　断纤维数 $b=1,2$ 和 3 时的应力集中因子随时间变化的曲线

—— 表示 Hedgepeth 估计；…… 表示渐近法计算结果

图中可以看到，应力集中因子 $K_b(0,\tau)$ 随无量纲时间 $\tau$ 的增加而变化，并逐渐趋于稳定值。在所有的情形中，曲线中的第一个峰是最高的，此峰的应力值确定了**动力超越度**。

Hedgepeth(1961)把最大应力与静应力之比定义为**动力响应因子**，对于断纤维数 $b=1,2$ 和 3 时的动力响应因子之值分别为 1.15,1.19 和 1.20。结果也表明，当断裂纤维数 $b$ 趋于无穷时，动力响应因子趋于 1.27。

为了进一步研究断口邻近完整纤维的动应力集中沿纤维长度方向的变化情况，Ji、Liu 和 Chou(1985)在 Hedgepeth 方法的基础上，对拉普拉斯反变换提出了如下的渐近计算方法。首先，将式(2.66)和式(2.67)中的根式项展开成泰勒级数

$$L_0^*(0,S)=-\frac{S}{\pi}\int_0^{\pi}\left[1+\frac{1}{2}(4\sin^2\frac{\theta}{2}/S^2)-\frac{1}{2\times 4}(4\sin^2\frac{\theta}{2}/S^2)^2+\frac{1\times 3}{2\times 4\times 6}\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}/S^2\right)^3+\cdots\right]\mathrm{d}\theta \tag{2.68}$$

$$L_1^*(\xi,S)=-\frac{S}{\pi}\int_0^{\pi}\left[F_0+\frac{F_1}{1!}(4\sin^2\frac{\theta}{2}/S^2)+\frac{F_2}{2!}(4\sin^2\frac{\theta}{2}/S^2)^2+\frac{F_3}{3!}(4\sin^2\frac{\theta}{2}/S^2)^3+\cdots\right]\cos\theta\mathrm{d}\theta \tag{2.69}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}F_0&=\exp(-S\xi)\\F_1&=\frac{1}{2}(1-S\xi)\exp(-S\xi)\\F_2&=\frac{1}{2^2}[-1-S\xi+(S\xi)^2]\exp(-S\xi)\\F_3&=\frac{1}{2^3}[3+3S\xi-(S\xi)^3]\exp(-S\xi)\\&\cdots\end{aligned}\right\} \tag{2.70}$$

使用下列关系可以对式(2.68)和式(2.69)中的积分项进行积分

$$\int_0^{\pi}\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^n \mathrm{d}\theta = \pi\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \tag{2.71}$$

$$\int_0^{\pi}\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^n \cos\theta \mathrm{d}\theta = \pi\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} - 2\pi\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \tag{2.72}$$

把式(2.68)和式(2.69)代入式(2.65)，并将相同阶数的$(-S\xi)$同类项进行合并后，就可以用长除法把$K_1^*(\xi,S)$展开成泰勒级数。最后，由式(2.64)的拉普拉斯反变换逐项获得$K_1(\xi,\tau)$的渐近表达式。

为了评价基于上述方法的数值计算的准确性，使用级数中的前40项进行数值计算，并将所求得的动力响应曲线($\xi=0$)与Hedgepeth的解答进行比较，见图2.9。由图可见，两者相当吻合。通过计算可以发现，当$\tau\leqslant 15$时，若取级数展开式的前40项，当$\tau\leqslant 10$时，取前20项，则渐近表达式具有良好的收敛性。

图2.10示出了$0\leqslant\xi\leqslant 1$时动应力集中因子$K_1(\xi,\tau)$随无量纲时间$\tau$的变化曲线。结果表明：

1) 在$\xi=0$处，断口紧邻的完整纤维始终承受轴向拉应力，对于$\xi\neq 0$的情形，由纤维断裂而导致的最初(initial)应力为压应力，其值随$\xi$的增加而增加。

2) 由最大的最初拉应力所定义的动应力集中因子随$\xi$的增加而减小。

3) 当$\tau>10$时，$\xi<1$的动应力集中因子结果逼近静应力集中值。

4) 在$0\leqslant\xi\leqslant 1$范围内，动应力集中因子是可估计的，譬如$K_1(\xi,\tau)>1.1$。

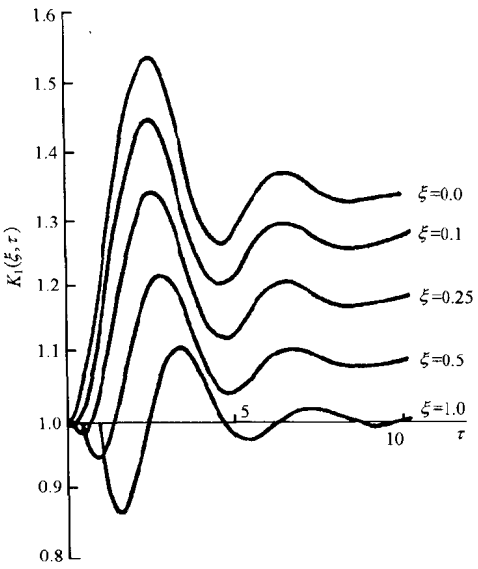



图2.10 $0\leqslant\xi\leqslant 1$时$K_1(\xi,\tau)$随$\tau$的变化曲线

应力集中因子随纤维的位置而改变需要计及纤维强度的离散性及纤维强度与其长度的变化性。上述结果表明，对于$\xi<1$，应力集中的变化是显著的；对于$\xi\geqslant 1.0\sim 2.0$，动力响应随$\tau$值的增加而逐渐减弱，动应力集中因子趋于1.0，实质上无应力集中。另一方面，对较小的$\tau$，即使$\xi\geqslant 2$，在纤维应力集中中仍存在动力响应，这个因素尚需在复合材料统计模型中考虑。

应力集中沿纤维长度的变化对纤维复合材料的动力破坏特性是有牵连的。例如，在Ji等(1981)的实验观察中，碳纤维复合材料通常在试样的夹持端部附近发生断裂。因此，在试样端部应力波的反射和放大可能导致远离断口处的纤维断裂。

## 2.3 修正的剪滞模型

### 2.3.1 Zweben 模型

1. 模型的描述

单向纤维增强复合材料的纵向拉伸破坏，通常是一个细观损伤累积(如纤维破损、基体破坏、界面屈服或脱粘)的随机过程。一般说来，纤维和基体之间需有良好的界面粘结，以保证能将应力传递给纤维。然而，断纤维邻近的基体破坏或纤维/基体界面的损伤，却有助于缓和未断纤维的应力集中，可以适度阻止裂纹的扩展，并吸收部分能量。事实上，应力集中的大小和影响范围高度依赖于纤维/基体界面的**粘结特性**，对基体的任何**非线性响应**也是十分敏感的。因此，断纤维邻近的基体破坏和界面的剪切屈服或脱粘对应力集中的影响，一直是国内外研究的热点。Van Dyke 和 Hedgepeth(1969)基于剪滞模型研究了仅一根纤维断裂后其邻近基体屈服、纤维脱粘对应力集中的影响，但在求解过程中，仍需采用影响函数和叠加法。很明显，此法不适宜于研究较多纤维发生相继断裂及裂纹邻近的基体或界面也发生破坏的情形。为此，Zweben(1974)提出了一种近似分析法，研究了垂直于纤维方向含有狭长割口的单向复合材料(见图 2.11)在轴向拉伸荷载作用下的应力重新分布问题，其中考虑了裂纹前沿区域基体的非弹性效应。该方法是将已断 $b$ 根纤维的组合体称为**断裂核**(即割口区域)，其两侧紧邻的是承受应力扰动的两根完整无损的纤维，其外侧是**均匀应变区**(不受断裂核影响)。假定纤维的切应变及断裂核中的切应变可以忽略，基体的拉应力也可以忽略，这些假定等效于剪滞分析所采用的假

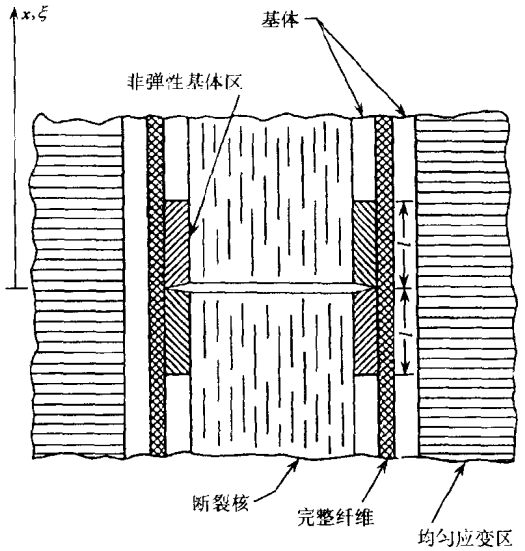



图 2.11 含有非弹性效应的应力集中分析模型

定。作为忽略断裂核中切应变的结果，在此核中的纤维的位移仅是平行于纤维的轴向坐标 $x$ 的函数。

由于裂纹前沿的基体具有较大的切应力集中，而且，大多数复合材料的**界面强度**及**基体强度**相对较弱，故裂纹前沿通常会产生**非弹性效应**，即断裂核与完整纤维之间的基体发生**脱粘**或**屈服**。因此，在分析模型中应该考虑此基体区域的非弹性行为。设此区域的轴向尺寸为 $2l$（上下对称），其中 $l$ 称为**非弹性长度**。在非弹性区域中的切应力假定为常数并且等于 $\eta\tau_s$，其中 $\tau_s$ 是基体或界面破坏应力（剪切强度），$\eta$ 称为**剪切参数**，是表征界面破坏程度的一种度量。当 $\eta=0$ 时，表示在非弹性区域中，断裂核与完整纤维之间无切应力传递；当 $0<\eta<1$ 时，表示它们之间存在一定的切应力（如摩擦力等）；$\eta=1$ 则表示在 $2l$ 范围内的基体为理想塑性的情形，此时的切应力恰好为 $\tau_s$。

在 $x=0$ 处的边界条件是断裂核的应力为零、完整纤维的位移为零。由于是混合边界条件，故选择 $u_0$ 和 $u_1$ 分别为断裂核和完整纤维的位移。列出断裂核和完整纤维微段的剪滞平衡方程分别为

$$\left.\begin{aligned} &bE_fA_f\frac{d^2u_0}{dx^2}-2\eta h\tau_s=0\\ &E_fA_f\frac{d^2u_1}{dx^2}+\frac{G_mh}{d}\left(\frac{\sigma_f}{E_f}x-u_1\right)+\eta h\tau_s=0\end{aligned}\right\},\quad 0\leqslant l\leqslant a \tag{2.73}$$

$$\left.\begin{aligned} &bE_fA_f\frac{d^2u_0}{dx^2}-2\frac{G_mh}{d}(u_1-u_0)=0\\ &E_fA_f\frac{d^2u_1}{dx^2}+\frac{G_mh}{d}(u_0-u_1)+\frac{G_mh}{d}\left(\frac{\sigma_f}{E_f}x-u_1\right)=0\end{aligned}\right\},\quad x\geqslant l \tag{2.74}$$

式中，$\sigma_f$ 为远场纤维应力；其他符号的定义与以前完全相同。边界条件是

$$\left.\frac{du_0}{dx}\right|_{x=0}=0,\quad u_1(0)=0,\quad E_f\left.\frac{du_0}{dx}\right|_{x\to\infty}=E_f\left.\frac{du_1}{dx}\right|_{x=\infty}=\sigma_f \tag{2.75}$$

引入无量纲参数

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dU_i(\xi)}{d\xi}=E_f\frac{du_i(x)}{dx}/\sigma_f,\quad i=0,1\\ &U_i(\xi)=u_i(x)\sqrt{E_fG_mh/(A_fd)}/\sigma_f,\quad i=0,1\\ &\xi=x\sqrt{G_mh/(E_fA_fd)},\quad \bar{l}=l\sqrt{G_mh/(E_fA_fd)}\\ &\bar{\tau}=\tau\sqrt{E_fdh/(G_mA_f)}/\sigma_f\end{aligned}\right\} \tag{2.76}$$

由此可求得无量纲剪滞平衡方程为

$$\left.\begin{aligned} &b\frac{d^2U_0}{d\xi^2}-2\eta\bar{\tau}_s=0\\ &\frac{d^2U_1}{d\xi^2}-U_1-\xi+\eta\bar{\tau}_s=0\end{aligned}\right\},\quad 0\leqslant\xi\leqslant\bar{l} \tag{2.77}$$

$$\left.\begin{aligned} b\frac{\mathrm{d}^2U_0}{\mathrm{d}\xi^2}+2(U_1-U_0)&=0\\ \frac{\mathrm{d}^2U_1}{\mathrm{d}\xi^2}-2U_1+U_0+\xi&=0\end{aligned}\right\},\quad \xi\geqslant\bar{l} \tag{2.78}$$

边界条件为

$$\left.\frac{\mathrm{d}U_0}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=0}=0,\quad U_1(0)=0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}U_0}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=\infty}=\left.\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=\infty}=1 \tag{2.79}$$

此外，在 $\xi=\bar{l}$ 处，还有位移及应力(或应变)的连续条件和剪切条件

$$U_1(\bar{l})-U_0(\bar{l})=-\bar{\tau}_s \tag{2.80}$$

式(2.77)～(2.79)的解答为

$$U_0=\frac{\eta\bar{\tau}_s}{b}\xi^2+C_1,\quad 0\leqslant\xi\leqslant\bar{l} \tag{2.81}$$

$$\left.\begin{aligned} U_0&=\xi+(2-k_1^2)B_1\mathrm{e}^{-k_1\xi}+(2-k_2^2)B_2\mathrm{e}^{-k_2\xi}\\ U_1&=\xi+B_1\mathrm{e}^{-k_1\xi}+B_2\mathrm{e}^{-k_2\xi}\end{aligned}\right\}\quad \xi\geqslant\bar{l} \tag{2.82}$$

式中，$k_{1,2}=[b+1\pm(b^2+1)^{1/2}]^{1/2}b^{-1/2}$；$C_1$，$B_1$ 和 $B_2$ 是待定常数。给定 $\bar{l}$ 和 $\eta$ 值，由 $\xi=\bar{l}$ 处的位移及应力(或应变)连续条件和式(2.80)的剪切条件，可解出 $C_1$，$B_1$，$B_2$ 和 $\bar{\tau}_s$。对于弹性情形，即 $\eta=0$，相应的位移由式(2.82)给出。

与 $b$ 根断纤维相关的应力集中因子可由下式求出

$$K_b(\xi)=\frac{\mathrm{d}U_1(\xi)}{\mathrm{d}\xi} \tag{2.83}$$

对于弹性情形，断纤维与完整纤维之间的无量纲切应力为

$$\bar{\tau}(\xi)=U_1(\xi)-U_0(\xi) \tag{2.84}$$

为了确定用该模型所获结果的精确性，按前述公式求得弹性情形下的纤维应力集中因子与 Hedgepeth 结果进行比较(见表 2.2)，表中还给出了切应力集中与 Fichter(1969)结果的比较。从表中可见，用 Zweben 模型求出的纤维应力集中因子均比 Hedgepeth 的结果小，其误差随断裂纤维数的增加而增加，当断裂纤维数达到 1 000 时，两者的相对误差约为 20%，而切应力集中因子则与 Fichter 结果较为接近。

**表 2.2　近似方法对单向复合材料在弹性情形下求得的纤维应力集中因子及切应力集中因子与 Hedgepeth 及 Fichter 结果的比较**

| 断裂纤维数 | 纤维应力集中因子 | | | 切应力集中因子 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Hedgepeth 模型 | Zweben 模型 | 相对误差/% | Fichter 结果 | Zweben 模型 | 相对误差/% |
| 1 | 1.333 | 1.293 | −3.0 | 0.785 | 0.765 | −2.6 |
| 10 | 2.97 | 2.55 | −14.1 | 2.77 | 2.72 | −1.8 |
| 100 | 8.92 | 7.19 | −19.14 | 8.85 | 9.40 | +5.5 |
| 1000 | 28.0 | 22.4 | −20.0 | 28.0 | 31.0 | +11.1 |

如图 2.12 所示，仅一根纤维发生断裂($b=1$)及裂纹前沿的基体发生屈服($\eta=1$)时，由近似方法及 Van Dyke 和 Hedgepeth(1969)获得的纤维应力集中因子($K_1^p$)随应力比($\sigma_f/\sigma_y$)而变化的比较，其中，$\sigma_y$ 为基体切应力刚好达到最大值 $\tau_s$ 时的远场纤维拉应力。在所比较的范围内，Zweben 结果也小于 Van Dyke 和 Hedgepeth 结果。

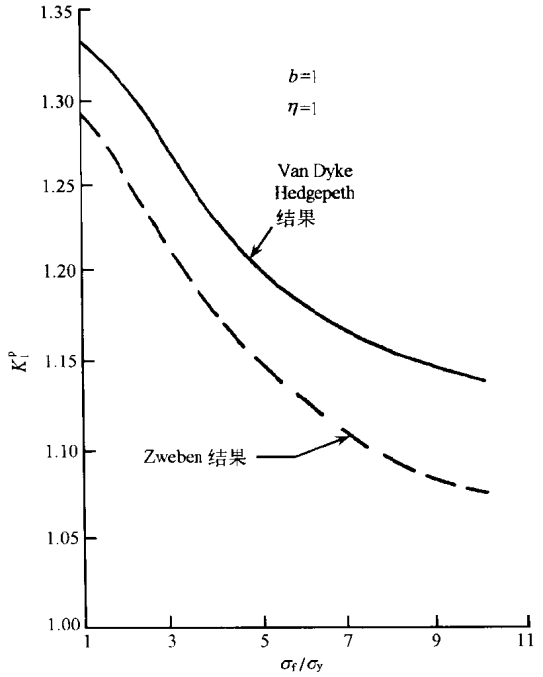



图 2.12　Zweben 结果与 Van Dyke 和 Hedgepeth 结果的比较

计算结果也表明，两种分析得出的无量纲非弹性区长度随应力而变化的曲线实质上是相同的。对于完全脱胶($\eta=0$)的情形，两种分析所得结果的变化趋势较为一致，但 Zweben 结果仍然小于 Van Dyke 和 Hedgepeth 结果，此处不再给出。

2. 与实验数据的比较

Beaumont 和 Phillips(1972)对垂直于纤维方向含有狭长割口的玻璃纤维/环氧及碳纤维/环氧单向复合材料进行了轴向拉伸破坏试验。他们发现，大多数材料的破坏是由于平行于纤维方向的劈裂破坏，劈裂起源于割口前沿。这种劈裂使材料变得"割口不敏感"，在这种意义下，含割口试样的破坏应力值可由破坏荷载除以去掉割口部分的截面积求得，即与无割口材料相似。惟一例外的是纤维经过特殊处理而获得较高剪切强度的 I 型碳纤维/环氧复合材料，含割口试样一般不发生纵向劈裂，裂纹是沿割口长度方向扩展的。Zweben 仅对此类复合材料采用近似方法进行分析。

Beaumont 和 Phillips 所提供的材料性能是：$E_f=360$ GPa，基体或界面剪切强

度 $\tau_s=80$ MPa，纤维体积分数 $V_f=0.4$，无割口复合材料拉伸强度＝690 MPa。根据所给的纤维直径 $d_f=8\times10^{-6}$m 及试样宽度 $W=25.4\times10^{-3}$m，可以算出当割口长度与试样宽度之比($2a/W$)等于 0.3，0.5 和 0.7 时，割断的纤维数 $b$ 分别为 680，1 130 和 1 580。

应用近似法分析的步骤是：首先令 $\bar{l}\to0$，由此求出弹性情形下的无量纲切应力集中 $\bar{\tau}_b$，它用来确定基体刚开始破坏时的远场纤维应力 $\sigma_y$，$\sigma_y$ 则由下列关系求得

$$\sigma_y=\frac{\tau_s}{\bar{\tau}_b}\left(\frac{E_f}{G_m}\right)^{1/2}\left(\frac{dh}{A_f}\right)^{1/2}=\frac{\tau_s}{\bar{\tau}_b}\left(\frac{E_f}{G_m}\right)^{1/2}(V_f)^{-1/2} \tag{2.85}$$

已知 $\sigma_y$，就可以利用 Beaumont 和 Phillips 给出的临界应力值 $\sigma_{fu}$ 算出破坏时的应力比 $\sigma_{fu}/\sigma_y$。图 2.13 示出了近似方法所估计的在各种 $2a/W$ 值时的纤维应力集中随应力比的变化曲线。然后，将这些结果与实验数据进行比较。

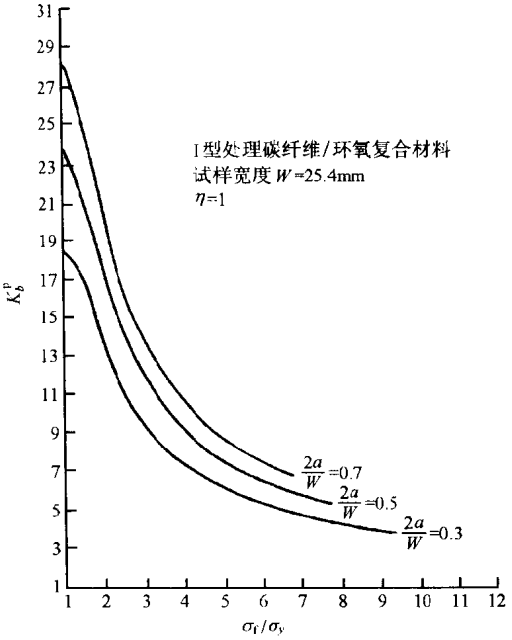



图 2.13　($2a/W$)等于 0.3，0.5 和 0.7 时的纤维应力集中随应力比的变化曲线

到此为止，尚需讨论一下关于近似分析所采用的破坏准则。Zweben(1977)基于割口根部纤维的应力提出了一种破坏准则，只要基体仍然保持是弹性的、应力集中是局部的，这就是一个合理的假定。但是，当超过基体强度时，受过应力影响的区域沿纵、横两个方向都有所增大，从而导致局部应力集中的减小。在此事件中，基于割口邻近第一根完整纤维断裂的破坏准则就不再适用。作为第一个近似，利用无割口拉伸试样的强度作为破坏准则似乎更合理。这就允许我们对理论和实验应力集中因子进行直接比较。

根据前述近似分析，可求得 3 种割口长度在弹性情形下的无量纲切应力集中

$\bar{\tau}_b$ 分别是 25.4,33.0 和 39.1。使用上述 $E_f=360$ GPa,$\tau_s=80$ MPa,$V_f=0.4$ 的数据并假定基体切变模量 $G_m=1.38$ GPa,求出 3 种割口情形的基体刚开始破坏时的名义纤维应力 $\sigma_y$ 分别为 80.613 MPa,62.01 MPa 和 52.354 MPa。自然,这些应力随割口长度的增加而减小。再利用 Beaumont 和 Phillips 所提供的临界应力 $\sigma_{fu}$ 值算出最终的应力比($\sigma_{fu}/\sigma_y$)分别是 6.1,3.6 和 3.6。根据这些数据,从图 2.13 中即可求得与 3 种割口情形相对应的纤维应力集中因子。

表 2.3 给出了 Zweben 模型估计的应力集中因子与实验数据的比较,表中还给出了弹性情形下的 Hedgepeth 结果。

**表 2.3 理论应力集中因子与实验结果的比较**

| 无量纲裂纹长度 | 应力集中因子 | | |
|---|---|---|---|
| $2a/W$ | Hedgepeth 结果(弹性情形) | Zweben 结果(非弹性情形) | 实验结果 |
| 0.3 | 23.1 | 5.2 | 3.5 |
| 0.5 | 29.8 | 10.2 | 7.7 |
| 0.7 | 35.3 | 12.0 | 9.2 |

根据近似分析的结果与实验数据之间的比较,近似分析为所观察到的复合材料断裂行为提供了一种较合理的描述,这些估计起因于有限的纤维应力集中,它们与任何奇异性毫无联系,也与断裂过程的能量吸收无关。

利用近似分析,也可以解释Ⅱ型处理碳纤维复合材料为什么会发生劈裂破坏。首先,因为这些试样比Ⅰ型复合材料具有更大的纤维体积分数($V_f=0.7$),所以,给定长度的割口将切断更多的纤维,从而导致无量纲弹性切应力 $\bar{\tau}_b$ 具有较大值。其次,具有量纲的切应力 $\tau_b$ 随 $V_f^{1/2}$ 和 $(G_m/E_f)^{1/2}$ 线性地变化,对于Ⅱ型试样,$V_f^{1/2}$ 和 $(G_m/E_f)^{1/2}$ 均有较大的值,而 $(G_m/E_f)^{1/2}$ 值则更大,因为Ⅱ型纤维的拉伸模量较低。所有这些因素均导致近似分析求出的切应力具有较大的值(Ⅱ型复合材料的切应力约为Ⅰ型复合材料的 2 倍)。因此,对Ⅱ型复合材料来说,劈裂更可能发生。类似地,玻璃纤维环氧/复合材料也具有较大的基体切应力,因为,它们具有较低的拉伸模量及较高的纤维体积分数。

### 2.3.2 弹塑性剪滞模型

基于剪滞理论,范赋群(1981)对单向纤维复合材料的纵向拉伸破坏过程中的应力重新分布问题提出了一种修正的剪滞分析模型如图 2.14 所示。此模型将纤维分成 3 组:已断纤维(任意数目)——断裂核、裂纹前沿的两根纤维以及其他纤维。且设各组纤维的应力(或应变)各自相同,基体只能承受剪切。已断部分的宽度 $t_0=bt_1$,$t_1$ 为增强材料宽度,$b$ 为已断纤维的数目。在计算与 $t_0$ 相应的复合材料的宽度时,应加入其中基体的宽度。此外,假设纤维是等距($t$)放置的。为简便起见,取图 2.14 的厚度为 1 单位;对圆形纤维,可假设纤维的上下部分的基体不起作用。这里

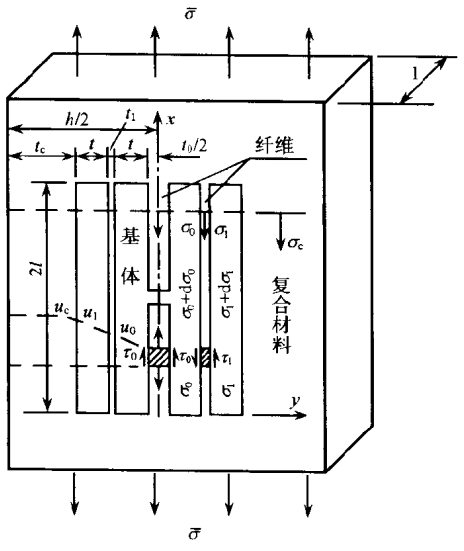



图 2.14　弹塑性剪滞分析模型

按前一情形考虑。

列出图 2.14 虚线以上部分的平衡方程

$$\sigma_c t_c + \sigma_1 t_1 + \frac{1}{2}\sigma_0 t_0 = \bar{\sigma}\frac{h}{2} \tag{2.86a}$$

微分得

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_c}{\mathrm{d}x}t_c + \frac{\mathrm{d}\sigma_1}{\mathrm{d}x}t_1 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\sigma_0}{\mathrm{d}x}t_0 = 0 \tag{2.86b}$$

列出中部纤维(断裂核)及其两相邻纤维 $\mathrm{d}x$ 段的平衡方程分别为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_0}{\mathrm{d}x} = -\frac{2\tau_0}{t_0} \tag{2.87a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_1}{\mathrm{d}x} = -\frac{\tau_1 - \tau_0}{t_1} \tag{2.87b}$$

基体切应变

$$\gamma_0 = \frac{u_1 - u_0}{t} \tag{2.88a}$$

$$\gamma_1 = \frac{u_c - u_1}{t} \tag{2.88b}$$

纤维和复合材料的胡克定律

$$\sigma_0 = E_f\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x} \tag{2.89a}$$

$$\sigma_1 = E_f\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} \tag{2.89b}$$

$$\sigma_c = E_c \frac{du_c}{dx} \tag{2.89c}$$

基体为硬化材料时的应力应变关系

$$\tau_0 = G_m \gamma_0 [1 - \omega(\gamma_0)] \tag{2.90a}$$

$$\tau_1 = G_m \gamma_1 [1 - \omega(\gamma_1)] \tag{2.90b}$$

其中，$0 \leqslant \omega(\gamma) \leqslant 1$。上列诸式中各符号的意义见图 2.14，所用的都是常用符号，在此仅指出：下标 0，1，c 是用于区别表示已断纤维、裂纹前沿完整纤维以及复合材料的指标(基体除外)。图中的 $2l$ 为影响区，其值待定。

微分式(2.88a)两次，注意到其余各式，得

$$\frac{d^2\gamma_0}{dx^2} + g_1\gamma_1 - (2g_0 + g_1)\gamma_0 = G_0(x) \tag{2.91}$$

同理可得

$$\frac{d^2\gamma_1}{dx^2} + g_1\gamma_0 - (g_c + g_1)\gamma_1 = G_1(x) \tag{2.92}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} g_0 &= \frac{G_m}{E_f t t_0} \\ g_1 &= \frac{G_m}{E_f t t_1} = \frac{t_c}{t_1} g_0 \\ g_c &= \frac{G_m}{E_f t t_c} = \frac{t_0}{V_f t_c} g_0 \\ G_0(x) &= g_1\gamma_1\omega(\gamma_1) - (2g_0 + g_1)\gamma_0\omega(\gamma_0) \\ G_1(x) &= g_1\gamma_0\omega(\gamma_0) - (g_c + g_1)\gamma_1\omega(\gamma_1) \end{aligned}\right\} \tag{2.93}$$

这里 $G_0(x)$，$G_1(x)$ 是未知应变 $\gamma_0$，$\gamma_1$ 的已知非线性函数。下面的问题就是求解非线性微分方程组式(2.91)和式(2.92)。将式(2.91)中的 $\gamma_0$ 表示成

$$\gamma_0 = -\frac{g_1\gamma_1 - G_0(x)}{D^2 - (2g_0 + g_1)} \tag{2.94}$$

其中，算符 $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$。将上式代入式(2.92)，得

$$D^4\gamma_1 - (2g_0 + 2g_1 + g_c)D^2\gamma_1 + (2g_0g_c + 2g_0g_1 + g_1g_c)\gamma_1 = G_2(x) \tag{2.95}$$

其中

$$G_2(x) = D^2G_1(x) - (2g_0 + g_1)G_1(x) - g_1G_0(x) \tag{2.96}$$

是 $\gamma_0$，$\gamma_1$ 的与 $\omega$ 有关的已知非线性函数。

四阶非线性常微分方程式(2.95)，当其右边的非线性项 $G_2(x)$ 为 $x$ 的已知函数时，就成为四阶非齐次线性常微分方程，不难求出其通解

$$\gamma_1 = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{-r_1 x} + C_3 e^{r_2 x} + C_4 e^{-r_2 x} + \bar{\gamma}_1 \tag{2.97}$$

$$\bar{\gamma}_1 = \frac{1}{2(r_1^2 - r_2^2)} \left\{ \frac{1}{r_1} \left[ e^{r_1 x} \int_{\infty}^{x} e^{-r_1 t} G_2(t) dt - e^{-r_1 x} \int_{\infty}^{x} e^{r_1 t} G_2(t) dt \right] \right.$$

其中

$$\left. - \frac{1}{r_2} \left[ e^{r_2 x} \int_{\infty}^{x} e^{-r_2 t} G_2(t) dt - e^{-r_2 x} \int_{\infty}^{x} e^{r_2 t} G_2(t) dt \right] \right\} \tag{2.98}$$

为非齐次方程的特解；$\pm r_1, \pm r_2$

$$\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} = \sqrt{\frac{1}{2}[2g_0 + 2g_1 + g_c \pm \sqrt{4g_1^2 + (2g_0 - g_c)^2}]} \tag{2.99}$$

为特征方程的 4 个互异实根。

若基体硬化规律 $\omega(\gamma)$ 的函数形式已知（如幂次硬化 $\tau = T_0 \gamma^{1/2} = G_m \gamma [1 - \omega(\gamma)]$，其中 $T_0$ 为常数），按式(2.97)可写出弹性解法的步骤如下：

1）一级近似　取 $\omega = 0$，此为基体是线弹性的情形，这时非齐次项等于零。可算得其解 $\gamma_0, \gamma_1$，是为一级近似解。

2）二级近似　将一级近似解代入 $G_0(x), G_1(x), G_2(x)$，按式(2.97)，式(2.92)及边界条件求 $\gamma_0, \gamma_1$ 得二级近似解。这也是一个线弹性问题，只是多了非齐次项（其边界条件与一级近似的也有相应的差别）。

重复二级近似的步骤可求下一级近似解，直到满意为止。

下面给出应用上有重要意义的基体为线弹性的解。这时

$$\gamma_1 = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{-r_1 x} + C_3 e^{r_2 x} + C_4 e^{-r_2 x} \tag{2.100}$$

以此代入式(2.92)，得

$$\begin{aligned} \gamma_0 = & - \frac{1}{g_1} (C_1 r_1^2 e^{r_1 x} + C_2 r_1^2 e^{-r_1 x} + C_3 r_2^2 e^{r_2 x} + C_4 r_2^2 e^{-r_2 x}) \\ & + \frac{g_c + g_1}{g_1} (C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{-r_1 x} + C_3 e^{r_2 x} + C_4 e^{-r_2 x}) \end{aligned} \tag{2.101}$$

由边界条件 $\gamma_1(0) = 0$ 和 $\gamma_0(0) = 0$（参见图 2.14），得 $C_2 = -C_1$ 和 $C_4 = -C_3$。采用另外 2 个常数 $D_1, D_2$，将式(2.100)和式(2.101)改写成

$$\gamma_1 = D_1 \mathrm{sh} r_1 x + D_2 \mathrm{sh} r_2 x \tag{2.102}$$

$$\gamma_0 = - \frac{1}{g_1} [D_1 r_1^2 \mathrm{sh} r_1 x + D_2 r_2^2 \mathrm{sh} r_2 x - (g_c + g_1)(D_1 \mathrm{sh} r_1 x + D_2 \mathrm{sh} r_2 x)] \tag{2.103}$$

再由边界条件 $\gamma_1(l) = 0$，得 $D_2 = -\dfrac{\mathrm{sh} r_1 l}{\mathrm{sh} r_2 l} D_1$。在此对式(2.87a)从 0 到 $x$ 积分得 $\sigma_0$ 的表达式，其中的 $D_1$ 由边界条件 $\sigma_0(l) = 0$ 确定，其结果为

$$D_1 = - \frac{\bar{\sigma} t_0 g_1}{2 V_f G_m}$$

$$\times \frac{1}{\left(r_1-\frac{g_c+g_1}{r_1}\right)(\mathrm{ch}r_1 l-1)-\frac{\mathrm{sh}r_1 l}{\mathrm{sh}r_2 l}\left(r_2-\frac{g_c+g_1}{r_2}\right)(\mathrm{ch}r_2 l-1)} \tag{2.104}$$

解出了 $D_1$，便可得全部解答。例如从 0 到 $x$ 积分式(2.87b)即可求出最感兴趣的 $\sigma_1$

$$\sigma_1=-\frac{D_1 G_m}{g_1 t_1}\left[(r_1^2-g_c)\frac{\mathrm{ch}r_1 x-1}{r_1}-\frac{\mathrm{sh}r_1 l}{\mathrm{sh}r_2 l}(r_2^2-g_c)\frac{\mathrm{ch}r_2 x-1}{r_2}\right]+\frac{\bar{\sigma}}{V_f} \tag{2.105}$$

利用条件：$x\to 0$ 时，$\sigma_1\to\bar{\sigma}/V_f$，再由求极限的罗比塔法则，即可求出 $l$。

取 $G_m/E_f=10^{-2}$，$t_1=8.89\times10^{-3}$cm，$t_c=2.5$cm，$V_f=0.5$。当断了一根纤维时，算得 $g_1=126.51/\mathrm{cm}^2$，$g_0=g_1$，$g_c=0.91/\mathrm{cm}^2\approx0$，$r_1=20.78$，$r_2=8.61$。从而解得 $l=0.215$cm，将其代入式(2.105)可得断口邻近完整纤维的应力分布。最大应力在 $x=l=0.215$cm 处，算得 $\sigma_1(l)=1.373\bar{\sigma}/V_f$，它比平均纤维应力大 1.373 倍，此即为断了一根纤维的应力集中因子 $K_1$，$K_1=1.373$。该模型估计的纤维应力集中因子与 Hedgepeth 结果的比较见表 2.4。

从表 2.4 中可见，弹塑性剪滞模型的计算结果比 Hedgepeth 结果略大。更为合理的计算模型是将图 2.14 两外侧基体宽度改为 $t/2$；重复上述全部过程，其结果列于上表括号内，它们与 Hedgepeth 结果十分接近。按此模型可算出全部应力场，特别是裂纹前沿纤维的应力分布及其影响区(过载区)的大小，它们随着裂纹长度的增加而增大。

**表 2.4　弹塑性剪滞模型估计的应力集中因子与 Hedgepeth 结果的比较**

| 断裂纤维数 | Hedgepeth 结果 | | 弹塑性剪滞模型的计算结果 | |
|---|---|---|---|---|
| $i$ | 纤维应力集中因子 $K_i$ | 影响区 $2l$/cm | 纤维应力集中因子 $K_i$ | 影响区 $2l$/cm |
| 1 | 1.333 | — | 1.373 (1.333) | 2×0.215 (2×0.184) |
| 3 | 1.829 | — | 1.960 (1.834) | 2×0.278 (2×0.235) |
| 5 | 2.216 | — | 2.479 (2.276) | 2×0.310 (2×0.260) |

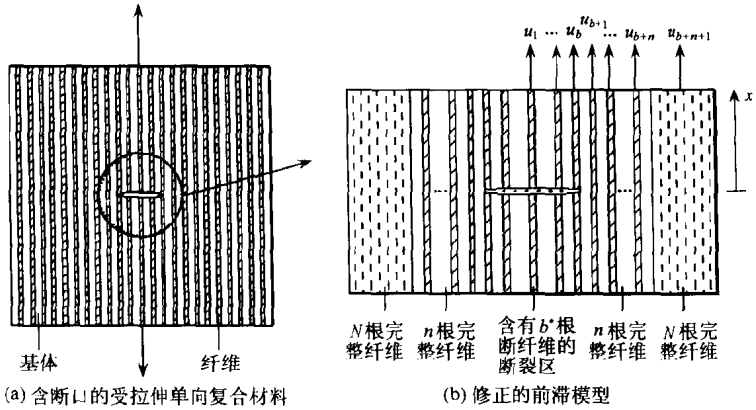
### 2.3.3　修正的剪滞分析模型

通过上述讨论可知，Hedgepeth 的剪滞理论在求解应力重新分布时需要采用影响函数和叠加法，因此，采用该方法去研究某些问题(如有界面或基体损伤时的情形)是有困难的。虽然 Zweben 和范赋群分别建立有较简化的剪滞模型，但是，由这些简化的剪滞模型求得的应力集中因子，结果均不够精确。为此，(2001 年)曾庆敦对这些模型的缺陷作了改进，提出一种修正的剪滞模型，首先研究受纵向拉伸荷载作用的单向纤维增强复合材料在弹性情形下由纤维断裂所导致的应力重新分布问题；然后，将此模型推广，研究了任意根纤维断裂及纤维/基体界面破坏(非弹性

情形)相互作用所导致的应力重新分布,并定量地研究了界面剪切强度对应力集中及界面损伤区长度的影响。

1. 模型的描述

图 2.15(a)为含有断裂纤维的二维单向复合材料,沿纤维方向受均匀拉伸,设纤维为等距排列。考虑纤维承受拉力作用,基体仅传递剪力。为了求解应力重分布,现从复合材料中对称地取出一个如图 2.15(b)所示的剪滞分析模型,此模型共含有$(b^*+2n+2N)$根纤维。将这些纤维由里向外进行分组。第 1 组为含有 $b^*$ 根已断纤维,构成了所谓的断裂核。考虑对称性,断裂核中的纤维的轴向位移设为 $u_1$, $u_2,\cdots,u_b$,其中 $b=(b^*+1)/2$(当 $b^*$ 为奇数时),或 $b=b^*/2$(当 $b^*$ 为偶数时)。第 2 组为紧邻断裂核的 $2n$ 根完整纤维,其位移用 $u_{b+1},u_{b+2},\cdots,u_{b+n}$表示。余下的 $2N$ 根纤维则为第 3 组——均匀应变区,参照 Zweben 的假定,这组纤维和基体中的切应变忽略不计,各纤维位移均相同,其位移用 $u_{b+n+1}$表示。$n$ 和 $N$ 的取值视断口长度而定(后详)。



(a) 含断口的受拉伸单向复合材料　　(b) 修正的前滞模型

图 2.15

采用前述常用符号,据图 2.15(b)所示的剪滞分析模型,可列出第 1、2 组中各纤维微段及第 3 组微段的剪滞平衡方程为

$$\left.\begin{aligned} &E_fA_f\frac{d^2u_1}{dx^2}+\frac{2^kG_mh(u_2-u_1)}{d}=0\\ &E_fA_f\frac{d^2u_i}{dx^2}+\frac{G_mh(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})}{d}=0,\quad i=2,3,\cdots,b+n\\ &NE_fA_f\frac{d^2u_{b+n+1}}{dx^2}+\frac{G_mh(u_{b+n}-u_{b+n+1})}{d}=0 \end{aligned}\right\}\qquad(2.106)$$

考虑对称性,式(2.106)的第 1 式添加了一个控制变量 $k$,当 $b^*$ 为奇数时,$k=1$;当 $b^*$ 为偶数时,$k=0$。

在线弹性条件下,纤维轴向拉力与位移的关系为 $p_i(x)=E_fA_f(du_i/dx)$。为便

于计算，需引进下述无量纲量

$$p_i = p \cdot P_i, \quad u_i = p\sqrt{\frac{d}{E_f A_f G_m h}}U_i, \quad x = \sqrt{\frac{E_f A_f d}{G_m h}}\xi \tag{2.107}$$

式中，$p$ 为纤维远场拉力；$P_i$，$U_i$ 和 $\xi$ 分别为 $p_i$，$u_i$ 和 $x$ 的无量纲形式。

将式(2.107)代入式(2.106)得无量纲的剪滞平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2U_1}{d\xi^2} + 2^k(U_2 - U_1) = 0\\
&\frac{d^2U_i}{d\xi^2} + (U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}) = 0, \quad i = 2,3,\cdots,b+n\\
&N\frac{d^2U_{b+n+1}}{d\xi^2} + (U_{b+n} - U_{b+n+1}) = 0
\end{aligned}\right\} \tag{2.108}$$

其相应的无量纲边界条件为

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\frac{dU_i}{d\xi}\right|_{\xi=\infty} = 1, \quad i = 1,2,\cdots,b+n+1\\
&\left.\frac{dU_i}{d\xi}\right|_{\xi=0} = 0, \quad i = 1,2,\cdots,b\\
&U_i(0) = 0, \quad i = b+1,b+2,\cdots,b+n+1
\end{aligned}\right\} \tag{2.109}$$

2. *剪滞平衡方程的求解*

在边界条件式(2.109)中第1式的条件下，方程式(2.108)中的 $U_i$ 的通解为

$$U_i = \xi + \sum_{j=1}^{b+n+1} A_j B_{i,j}\exp(-\mu_j^2\xi) \tag{2.110}$$

式中，$A_j$ 为待定常数；$\mu_j^2$ 为矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的特征值，而矩阵 $\boldsymbol{T}$ 由式(2.108)得到

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix}
2^k & -2^k & & \mathbf{0} & \\
 & \ddots & & & \\
 & -1 & 2 & -1 & \\
 & & & \ddots & \\
 & \mathbf{0} & & -1/N & 1/N
\end{bmatrix} \tag{2.111}$$

$B_{i,j}$ 为已知常数，由下式给出：

$$\left.\begin{aligned}
&B_{1,j} = 1\\
&B_{2,j} = B_{1,j}(1 - \mu_j^2/2^k)\\
&B_{i,j} = B_{i-1,j}(2 - \mu_j^2) - B_{i-2,j}\\
&(j = 1,2,\cdots,b+n+1; \quad i = 3,4,\cdots,b+n+1)
\end{aligned}\right\} \tag{2.112}$$

将式(2.110)代入边界条件式(2.109)中的第2式，得

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{b+n+1} A_j B_{i,j}\mu_j = 1, \quad i = 1,2,\cdots,b\\
&\sum_{j=1}^{b+n+1} A_j B_{i,j} - 0, \quad i - b+1,b+2,\cdots,b+n+1
\end{aligned}\right\} \tag{2.113}$$

上式是关于待定常数 $A_j$ 的$(b+n+1)$阶非齐次线性代数方程组，从中可解出 $A_j$，将 $A_j$ 代回式(2.109)，即可得到位移分布。

在 $\xi=0$ 处，断口最邻近完整纤维的拉伸应力集中因子则由下式求得

$$K_{b^*}=\left.\frac{\mathrm{d}U_{b+1}}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=0}=1-\sum_{j=1}^{b+n+1}A_jB_{b+1,j}\mu_j \tag{2.114}$$

3. 算例

对于任一给定的 $b^*$，对照 Hedgepeth 的计算结果通过试算，可选取 $n$ 及 $N$ 值。表 2.5 给出了所选取的最佳 $n$，$N$ 值及由此算得的紧邻断裂核的完整纤维的应力集中因子。作为比较，表中也列出了 Hedgepeth 的结果。从表中可见，当取 $n$ 为 $n=b^*+2$ 至 3，取 $N$ 为 $N=b^*+n+3$ 至 4，可以获得与 Hedgepeth 理论相当接近的结果。从而证实了此模型的合理性和正确性。

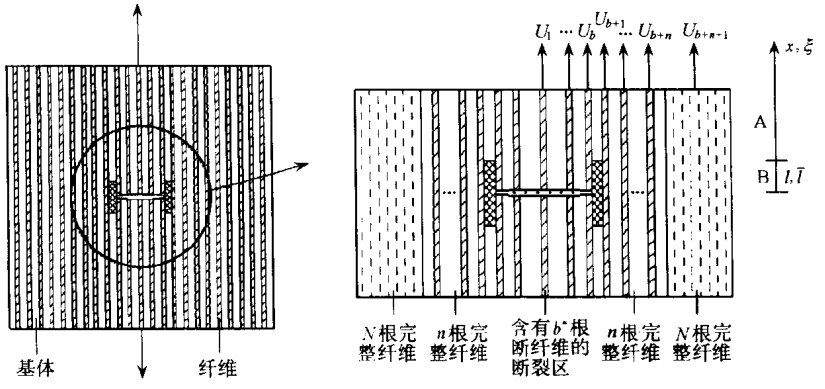
**表 2.5 修正的剪滞模型估计的纤维应力集中因子与 Hedgepeth 结果的比较**

| 断纤维数 $b^*$ | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 断口邻近的完整纤维数 $n$ | | 3 | 5 | 5 | 6 | 8 | 8 | 9 | 10 | 10 |
| 均匀应变区中的纤维数 $N$ | | 6 | 10 | 11 | 13 | 17 | 18 | 20 | 22 | 23 |
| $K_{b^*}$ | 修正剪滞模型结果 | 1.334 0 | 1.600 5 | 1.828 9 | 2.032 5 | 2.216 9 | 2.386 9 | 2.546 4 | 2.696 6 | 2.837 8 |
| | Hedgepeth 结果 | 1.333 | 1.600 | 1.829 | 2.032 | 2.217 | 2.387 | 2.546 | 2.696 | 2.838 |

4. 界面损伤对单向复合材料应力集中的影响

单向复合材料的拉伸破坏，是一种细观损伤累积的随机过程，纤维的断裂可导致基体的破坏和纤维/基体界面的损伤，因为界面的强度相对较弱。现采用前述模型，对图 2.16(a)具有纤维断裂和纤维/基体界面损伤的应力重分布进行研究。

图 2.16(b)为从复合材料中取出的含有 $b^*$ 根已断纤维及$(2n+2N)$根完整纤维的分析模型，图中也示出了紧邻断口的纤维/基体界面发生屈服破坏的情形。参




(a) 具有纤维及界面损伤的受拉伸的复合材料

(b) 计及界面损伤的剪滞分析模型

图 2.16

照 Zweben 的定义，对于任一复合材料系统，可用 $\tau_s$ 表示纤维/基体界面的剪切强度，当作用在界面上的切应力达到或超过 $\tau_s$ 时，界面发生剪切屈服或脱粘，并可沿纵向扩展，界面损伤区长度可用 $2l$ 表示(上下对称)。

假定作用在此区域的界面切应力 $\tau_f$ 是常数，并且等于 $\eta\tau_s$，其中 $\eta(0\leqslant\eta\leqslant1)$ 为 Zweben 定义的剪切参数。$\tau_f$ 的无量纲表示为 $\bar{\tau}_f=\eta\bar{\tau}_s$，这里的 $\bar{\tau}_s$ 为 $\tau_s$ 的无量纲形式，其关系式可由切应力的定义及式(2.107)导出

$$\bar{\tau}_s=(\tau_s/p)\sqrt{E_fA_fhd/G_m} \tag{2.115}$$

图 2.16 所示模型中的纤维仍按前述分组法分为 3 组，即将具有 $b^*$ 根断纤维的中心断裂核、邻近 $2n$ 根完整纤维及远离断裂核的 $2N$ 根完整纤维分为 1～3 组，各组的无量纲位移和编号见图 2.16。为区分起见，将此模型再分为弹性区域 A $(\bar{l}\leqslant\xi\leqslant\infty)$和非弹性区域 B$(0\leqslant\xi\leqslant\bar{l})$，其中 $\xi$ 和 $\bar{l}$ 分别为纵向坐标 $x$ 和 $l$ 的无量纲量。

对图 2.16 中的域 A$(\bar{l}\leqslant\xi\leqslant\infty)$列出各组微段的无量纲剪滞平衡方程的表达式与式(2.108)完全相同，仅需将 $U$ 换成 $U^A$ 即可。

对图 2.16 中的域 B$(0\leqslant\xi\leqslant\bar{l})$，各组微段的无量纲剪滞平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2U_1^B}{d\xi^2}+2^k(U_2^B-U_1^B)=0\\
&\frac{d^2U_i^B}{d\xi^2}+(U_{i+1}^B-2U_i^B+U_{i-1}^B)=0,\quad i=2,3,\cdots,b-1\\
&\frac{d^2U_b^B}{d\xi^2}+(-\eta\bar{\tau}_s)+(U_b^B-U_{b-1}^B)=0\\
&\frac{d^2U_{b+1}^B}{d\xi^2}+(U_{b+2}^B-U_{b+1}^B)-(-\eta\bar{\tau}_s)=0\\
&\frac{d^2U_i^B}{d\xi^2}+(U_{i+1}^B-2U_i^B+U_{i-1}^B)=0,\quad i=b+2,b+3,\cdots,b+n\\
&N\frac{d^2U_{b+n+1}^B}{d\xi^2}+(U_{b+n}^B-U_{b+n+1}^B)=0
\end{aligned}\right\} \tag{2.116}$$

注意式(2.116)中 $\eta\bar{\tau}_s$ 前面负号的意义，因为$(U_{完整}-U_{已断})$恒等于负值，而界面剪切强度习惯上取正值，所以在 $\eta\bar{\tau}_s$ 前面冠上了负号。

在 $\xi=\infty$，$dU_i^A/d\xi=1(i=1,2,\cdots,b+n+1)$的条件下，由式(2.108)可求得 $U_i^A$ 的通解(即式(2.110))为

$$U_i^A=\xi+\sum_{j=1}^{b+n+1}A_jB_{i,j}\exp(-\mu_j^2\xi),\quad i=1,2,\cdots,b+n+1 \tag{2.117}$$

式中，$A_j$ 为待定常数；$\mu_j^2(j=1,2,\cdots,b+n+1)$为矩阵 $\boldsymbol{T}_1$ 的特征值，$B_{i,j}$为已知常数($\boldsymbol{T}_1$ 和 $B_{i,j}$的表达式分别见式(2.111)和式(2.112))。

式(2.116)的通解为

$$\left.\begin{aligned} U_i^{\mathrm{B}} &= \bar{U}_i^{\mathrm{B}} + \sum_{j=1}^{2(b-1)} C_j D_{i,j}\exp(\nu_j\xi) + C_{2(b-1)+1}\xi + C_{2b}, \\ & i = 1,2,\cdots,b \\ U_i^{\mathrm{B}} &= \bar{U}_i^{\mathrm{B}} + \sum_{j=2b+1}^{2(b+n)} C_j D_{i,j}\exp(w_j\xi) + C_{2(b+n)+1}\xi + C_{2(b-n+1)}, \\ & i = b+1,b+2,\cdots,b+n+1 \end{aligned}\right\} \tag{2.118}$$

式中，$C_1 \sim C_{2(b+n+1)}$为未知常数；$\nu_j(j=1,2,\cdots,2(b-1))$为矩阵$\boldsymbol{T}_2$的非零特征值的正负开平方根，其中$\boldsymbol{T}_2$为

$$\boldsymbol{T}_2 = \begin{bmatrix} 2^k & -2^k & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & & \ddots \\ & \boldsymbol{0} & & -1 \quad 1 \end{bmatrix}, \tag{2.119}$$

当$i=1,2,\cdots,b$；$j=1,2,\cdots,2(b-1)$时，$D_{i,j}$为已知常数，由下式给出

$$\left.\begin{aligned} & D_{1,j} = 1, \quad D_{2,j} = D_{1,j}(1-\nu_j^2/2^k), \\ & D_{i,j} = D_{i-1,j}(2-\nu_j^2) - D_{i-2,j} \\ & j = 1,2,\cdots,2(b-1); \quad i = 3,4,\cdots,b \end{aligned}\right\}, \tag{2.220}$$

$w_j[j=2b+1,2b+2,\cdots,2(b+n)]$为矩阵$\boldsymbol{T}_3$的非零特征值的正负开平方根，其中

$$\boldsymbol{T}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & & \ddots \\ & \boldsymbol{0} & & -1 \quad 1 \end{bmatrix}, \tag{2.221}$$

当$i=b+1,b+2,\cdots,b+n+1$；$j=2b+1,2b+2,\cdots,2(b+n)$时，$D_{i,j}$也为已知常数，其表达式为

$$\left.\begin{aligned} & D_{b+1,j} = 1, \quad D_{b+2,j} = D_{b+1,j}(1-w_j^2), \quad D_{i,j} = D_{i-1,j}(2-w_j^2) - D_{i-2,j} \\ & j = 2b+1,2b+2,\cdots,2b+2n; \quad i = b+3,b+4,\cdots,b+n+1 \end{aligned}\right\}, \tag{2.222}$$

$\bar{U}_i^{\mathrm{C}}(i=1,2,\cdots,b)$为式(2.116)前$b$个方程的任一组特解，$\bar{U}_i^{\mathrm{C}}(i=b+1,b+2,\cdots,b+n+1)$则为式(2.116)后$(n+1)$个方程的任一组特解。

对于图 2.16 所示的破坏模式，待定常数为：$A_1 \sim A_{b+n+1}$，$C_1 \sim C_{2(b+n+1)}$及$\bar{l}$。

为求解域 A 和域 B 的无量纲剪滞平衡方程，需引进下述边界条件、连续条件及剪切条件：

1) 在$\xi=0$处，断裂纤维的应变或应力为零，即

$$\mathrm{d}U_i^{\mathrm{B}}(0)/\mathrm{d}\xi = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,b) \tag{2.223}$$

2) 在$\xi=0$处，完整纤维的位移为零，即

$$U_i^{\mathrm{B}}(0) = 0 \quad (i = b+1,b+2,\cdots,b+n+1) \tag{2.224}$$

3）在 $\xi=\bar{l}$ 处，位移应该连续，即

$$U_i^{\mathrm{B}}(\bar{l}) = U_i^{\mathrm{A}}(\bar{l}) \quad (i = 1,2,\cdots,b+n+1) \tag{2.225}$$

4）在 $\xi=\bar{l}$ 处，应变应该连续，即

$$\mathrm{d}U_i^{\mathrm{B}}(\bar{l})/\mathrm{d}\xi = \mathrm{d}U_i^{\mathrm{A}}(l)/\mathrm{d}\xi \quad (i = 1,2,\cdots,b+n+1) \tag{2.226}$$

5）在 $\xi=\infty$ 处，有

$$\mathrm{d}U_i^{\mathrm{A}}(\infty)/\mathrm{d}\xi = 1 \quad (i = 1,2,\cdots,b+n+1) \tag{2.227}$$

6）在 $\xi=\bar{l}$ 处，作用在断裂纤维与完整纤维之间的界面上的切应力应该等于界面剪切强度，即

$$U_{b+1}^{\mathrm{A}} - U_b^{\mathrm{A}} = -\bar{\tau}_{\mathrm{s}} \tag{2.228}$$

由这些条件恰好可以完全确定所有待定常数。

在 $\xi=0$ 处，断口紧邻完整纤维的拉伸应力或应变集中因子可由下式求得

$$K_{b^*} = \left.\frac{\mathrm{d}U_{b+1}^{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=0} \tag{2.229}$$

为了计算界面损伤区（无量纲）长度 $\bar{l}_{b^*}$ 和纤维应力集中因子 $K_{b^*}$，必须先给定 $n$、$N$ 及 $\eta$。$n$ 和 $N$ 的取值由前述给出，即 $n=b^*+2$（至 3），$N=b^*+n+3$（至 4）。下面仅给出 $\eta=1$ 时的计算结果。

图 2.17 和图 2.18 分别示出了界面损伤区（无量纲）长度 $\bar{l}_{b^*}$（$b^*=1,2,\cdots,5$）和纤维应力集中因子 $K_{b^*}$（$b^*=1,2,\cdots,5$）与无量纲界面剪切强度 $\bar{\tau}_{\mathrm{s}}$ 的关系。这些图表明，$\bar{l}_{b^*}$ 随 $\bar{\tau}_{\mathrm{s}}$ 的增加而减小，但随 $b^*$ 的增加而增加（$\bar{\tau}_{\mathrm{s}}$ 较小时，增加的幅度较大）。$K_{b^*}$ 则随 $\bar{\tau}_{\mathrm{s}}$ 及 $b^*$ 的增加而增加，但其值均比弹性情形下的小。这表明，纤维/基体界面的损伤破坏确实能有效地降低断口邻近纤维的应力集中，这似乎对提高复合材料的拉伸强度是有利的。通过上述研究可以发现，界面剪切强度是影响复合材料拉伸细观破坏机制的一种重要参数。若界面剪切强度太高，则应力集中增加，断口邻近的纤维将在较大的应力集中作用下发生断裂，从而导致强度下降；若界面剪切强度太低，界面破坏则成为控制因素，对材料的承载能力同样有严重的影响。因此，合理地控制界面剪切强度，有助于提高复合材料性能。

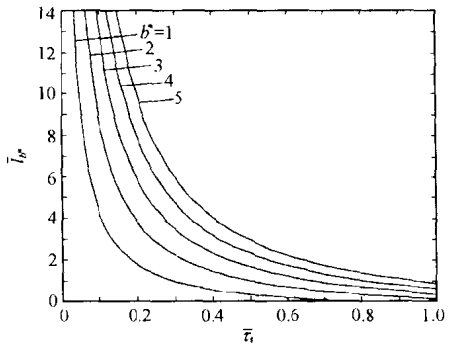



图 2.17 $\bar{l}_{b^*}$ 与 $\bar{\tau}_{\mathrm{s}}$ 的关系

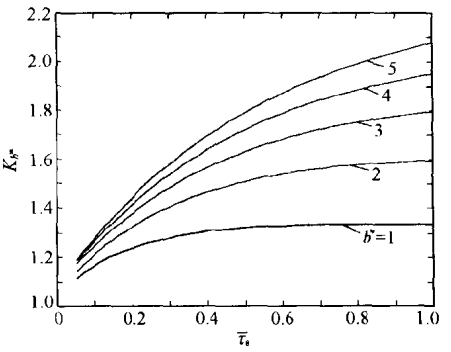



图 2.18 $K_{b^*}$ 与 $\bar{\tau}_{\mathrm{s}}$ 的关系

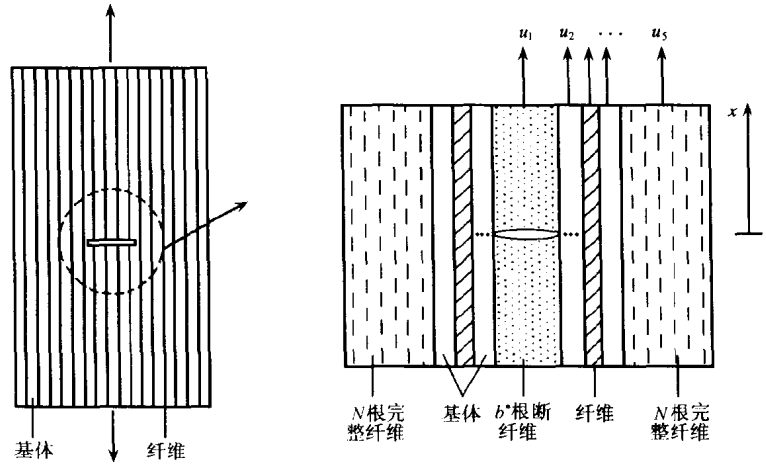
## 2.4 单向复合材料中的纤维和基体的应力集中

从上述的讨论可知，剪滞分析方法可以较好地描述基体的拉伸模量较低及纤维体积分数较大的单向复合材料（如树脂基复合材料）中断裂纤维前沿的应力集中现象。然而，像金属或陶瓷基这样的复合材料，采用忽略基体拉力的剪滞假定似乎与实际不符。为此，Ochiai 等（1991）提出了一种计及基体拉力的修正的剪滞模型，研究了二维单向复合材料中纤维断裂、基体的横向断裂及纤维/基体界面破坏对断口邻近的纤维和（或）基体的应力集中的影响。然而，他们所提出的分析方法，虽然计及了上述因素，但是，对于具有纤维/基体界面破坏的问题，仅能求出一根纤维断裂后的应力重新分布，其局限性是显而易见的。针对这个缺陷，1997 年和 1998 年曾庆敦提出了下述的简化剪滞模型，较好地解决了上述问题。

### 2.4.1 计及基体拉力的简化剪滞模型

1. 模型的描述

图 2.19(a)为含有断裂元素（纤维和（或）基体）的二维单向复合材料，沿纤维方向承受均匀拉伸，设纤维为等距排列。考虑纤维和基体均承受拉力作用，且两者都能传递剪力。为了求解应力重分布，现从复合材料中对称地取出一个如图 2.19(b)所示的剪滞分析模型，此模型共含有$(b+2+2N)$根纤维。将这些纤维和基体元素由里向外进行分组。第 1 组为含有 $b$ 根已断纤维和$(b-1)$个已断的基体元素，构成了所谓的断裂核。参照 Zweben 的假定，此断裂核中的切应变忽略不计，核中的纤维和基体元素的轴向位移均为 $u_1$，且仅是纵向坐标 $x$ 的函数。第 2 组为紧邻断裂核的两个基体元素，其位移用 $u_2$ 表示。第 3 组为上述基体元素紧邻的两根完整




(a) 含断纤维的受拉伸单向复合材料　　(b) 计及基体拉伸刚度的简化剪滞模型

图 2.19

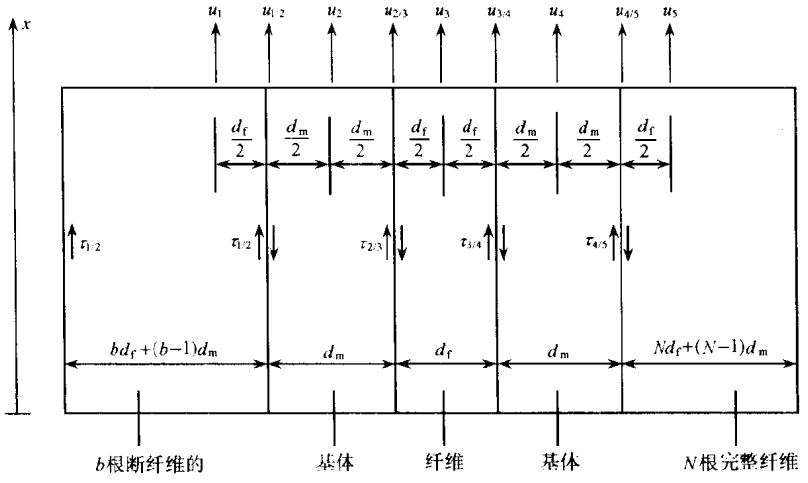



图 2.20 纤维、基体、界面位移及作用在界面上的切应力示意图

纤维，其位移用 $u_3$ 表示。就模型中的纤维而言，它们受到最强烈的应力扰动。第 4 组为上述两根完整纤维邻近的两个基体元素，其位移用 $u_4$ 表示。余下的 $2N$ 根纤维(均匀应变区)则为第 5 组，$N$ 的取值视断口长度而定(详见后文)。同理可忽略这组纤维和基体中的切应变，其位移用 $u_5$ 表示。

设纤维直径、拉伸模量和切变模量分别为 $d_f$、$E_f$ 和 $G_f$，纤维之间的基体宽度、拉伸模量和切变模量分别为 $d_m$，$E_m$ 和 $G_m$，复合材料的厚度为 $h$。图 2.20 示出了纤维、基体、纤维/基体界面层的位移及作用在界面上的切应力(由于对称，模型左边部分则未在图中示出)。为了简化计算，$N$ 根完整纤维外边界面上的切应力假定为零，因为此处已远离断裂核，几乎不受应力扰动了。

根据 Ochiai 等人的理论，对于任一纤维/基体界面上的切应力，可用下式表示

$$\begin{aligned}\tau_{i/(i+1)} &= G_m(u_{i+1} - u_{i/(i-1)})/(d_m/2)\\ &= G_f(u_{i/(i-1)} - u_i)/(d_f/2), \quad i = 1,2,3,4\end{aligned} \tag{2.230}$$

从式中消去界面位移得

$$\tau_{i/(i+1)} = [2G_fG_m/(d_fG_m + d_mG_f)](u_{i+1} - u_i), \quad i = 1,2,3,4 \tag{2.231}$$

考虑对称性，可以列出前述 5 组微段的剪滞平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}&[bd_fE_f + (b-1)d_mE_m]\frac{d^2u_1}{dx^2} + \frac{4G_fG_m(u_2 - u_1)}{(d_fG_m + d_mG_f)} = 0\\ &d_mE_m\frac{d^2u_2}{dx^2} + \frac{2G_fG_m(u_3 - 2u_2 + u_1)}{(d_fG_m + d_mG_f)} = 0\\ &d_fE_f\frac{d^2u_3}{dx^2} + \frac{2G_fG_m(u_4 - 2u_3 + u_2)}{(d_fG_m + d_mG_f)} = 0\\ &d_mE_m\frac{d^2u_4}{dx^2} + \frac{2G_fG_m(u_5 - 2u_4 + u_3)}{(d_fG_m + d_mG_f)} = 0\\ &[Nd_fE_f + (N-1)d_mE_m]\frac{d^2u_5}{dx^2} + \frac{2G_fG_m(u_4 - u_5)}{(d_fG_m + d_mG_f)} = 0\end{aligned}\right\} \tag{2.232}$$

为了便于计算，需引进下述无量纲参数：

$$\left.\begin{aligned} u_i &= \sigma_f[d_i(d_fG_m + d_mG_f)/(E_fG_fG_m)]^{1/2}U_i, \quad i = 1,2,\cdots,5 \\ x &= [E_fd_f(d_fG_m + d_mG_f)/(G_fG_m)]^{1/2}\xi \end{aligned}\right\} \tag{2.233}$$

式中，$U_i$ 和 $\xi$ 分别为 $u_i$ 和 $x$ 的无量纲形式；$\sigma_f$ 为远场纤维拉应力。再引入拉伸刚度比

$$R = E_md_m/(E_fd_f) = E_mV_m/(E_fV_f) \tag{2.234}$$

式中，$V_f$ 和 $V_m$ 分别为纤维和基体的体积分数，并由下式给出：

$$\left.\begin{aligned} V_f &= \frac{d_f}{d_f + d_m} \\ V_m &= \frac{d_m}{d_f + d_m} \end{aligned}\right\} \tag{2.235}$$

将式(2.233)～(2.235)代入式(2.232)，得

$$\left.\begin{aligned} &[b + (b-1)R]\frac{d^2U_1}{d\xi^2} + 4(U_2 - U_1) = 0 \\ &R\frac{d^2U_2}{d\xi^2} + 2(U_3 - 2U_2 + U_1) = 0 \\ &\frac{d^2U_3}{d\xi^2} + 2(U_4 - 2U_3 + U_2) = 0 \\ &R\frac{d^2u_4}{dx^2} + 2(U_5 - 2U_4 + U_3) = 0 \\ &[N + (N-1)R]\frac{d^2U_5}{d\xi^2} + 2(U_4 - U_5) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.236}$$

作用在界面上的切应力也可用无量纲形式表示。将式(2.233)中的第1式代入式(2.231)，得

$$2(U_{i+1} - U_i) = (\tau_{i/(i+1)}/\sigma_f)[E_f(d_fG_m + d_mG_f)/(d_fG_fG_m)]^{1/2}, \quad i = 1,2,3,4 \tag{2.237}$$

上式右边表示的是界面切应力无量纲形式 $\bar{\tau}_{i/(i+1)}$ 的一种度量，即

$$\bar{\tau}_{i/(i+1)} = 2(U_{i+1} - U_i) \tag{2.238}$$

2. 弹性情形的剪滞平衡方程的求解

为了检验该剪滞模型的正确性和合理性，首先忽略基体拉力的影响。令 $R=0$，由式(2.236)中的第2、4个式子解出 $U_2$ 和 $U_4$，再代回式(2.236)中的第1,3,5式，有

$$\left.\begin{aligned} &b\frac{d^2U_1}{d\xi^2} + 2(U_3 - U_1) = 0 \\ &\frac{d^2U_3}{d\xi^2} + U_5 - 2U_3 + U_1 = 0 \\ &\frac{d^2U_5}{d\xi^2} + (U_3 - U_5) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.239}$$

相应的边界条件是

$$\left.\begin{aligned}\xi=0:\ &\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}\xi}=0,\quad U_3=U_5=0\\ \xi=\infty:\ &\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}\xi}=\frac{\mathrm{d}U_3}{\mathrm{d}\xi}=\frac{\mathrm{d}U_5}{\mathrm{d}\xi}=1\end{aligned}\right\}\tag{2.240}$$

由式(2.240)即可求得具有 $b$ 根断裂纤维的断口最邻近完整纤维的应力集中因子是

$$\begin{aligned}K_b&=\left.\frac{\mathrm{d}U_3}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=0}\\&=1+\frac{(2-b\lambda_1^2)\lambda_2[2-b(\lambda_2^2-1)]+(2-b\lambda_2^2)\lambda_1[b(\lambda_1^2-1)-2]}{2b(\lambda_2^3-\lambda_1^3-\lambda_2-\lambda_1)+4(\lambda_1-\lambda_2)}\end{aligned}\tag{2.241}$$

其中

$$\begin{matrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{matrix}=\left\{\left(1+\frac{1}{b}+\frac{1}{2N}\right)\pm\left[1+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{(2N)^2}-\frac{1}{bN}\right]^{1/2}\right\}^{1/2}\tag{2.242}$$

从以上两式可以看出，不考虑基体拉力的纤维应力集中因子($K_b$)仅与断裂纤维的根数($b$)及均匀应变区中的完整纤维根数($N$)有关。对于任一给定的 $b$ 值，可以选取某一 $N$ 值，由式(2.242)可求出 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$，将其代入式(2.241)即可求出 $K_b$。为了能获得好的结果，可以对照 Hedgepeth 结果来选取 $N$ 值。表 2.6 给出了所选取的最佳 $N$ 值及由此值算得的纤维应力集中因子。作为比较，表中也列出了 Hedgepeth 结果。从表中可见，当 $b\leqslant 3$ 时，取 $N=b+2$；当 $4\leqslant b\leqslant 9$ 时，取 $N=b+1$，可以获得与 Hedgepeth 理论相当接近的结果(对于其他的 $b$ 值，同理可选出相应的 $N$ 值)。通过比较可知，图 2.19 所示模型具有简单、精确等优点。必须指出，若 $N$ 的取值大于(或小于)表 2.6 中所示之值，则由式(2.241)和式(2.242)求出的 $K_b$ 将偏小(或偏大)。

**表 2.6　简化剪滞模型估计的纤维应力集中因子与 Hedgepeth 结果的比较**

| 断纤维数 $b$ | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 均匀应变区中的纤维数 $N$ | | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $K_b$ | 简化剪滞模型结果 | 1.336 9 | 1.595 9 | 1.818 0 | 2.045 0 | 2.225 9 | 2.392 6 | 2.548 1 | 2.694 1 | 2.832 0 |
| | Hedgepeth 结果 | 1.333 3 | 1.600 0 | 1.828 6 | 2.031 7 | 2.216 5 | 2.387 0 | 2.546 1 | 2.695 8 | 2.837 7 |

对于计及基体拉力的应力重新分布问题，可由下列过程解出，其中，$N$ 的取值同上。式(2.236)中的 $U_i$ 的通解为

$$U_i=\xi+\sum_{j=1}^{5}A_jB_{i,j}\exp(-\mu_j\xi)+\sum_{j=6}^{10}A_jB_{i,j}\exp(\mu_j^2\xi),\quad i=1,2,\cdots,5$$

式中，$A_j$ 为待定常数；$\mu_j^2$ 为矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的特征值，而矩阵 $\boldsymbol{T}$ 由式(2.236)得到

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} 4/R_1 & -4/R_1 & 0 & 0 & 0 \\ -2/R_2 & 4/R_2 & -2/R_2 & 0 & 0 \\ 0 & -2/R_3 & 4/R_3 & -2/R_3 & 0 \\ 0 & 0 & -2/S_4 & 4/R_4 & -2/R_4 \\ 0 & 0 & 0 & -2/R_5 & 2/R_5 \end{bmatrix} \tag{2.243}$$

式中，$R_1=b+(b-1)R$，$R_2=R$，$R_3=1$，$R_4=R$，$R_5=N+(N-1)R$；$B_{i,j}$为已知常数，由下式给出

$$\left.\begin{aligned} B_{1,j} &= 1 \\ B_{2,j} &= B_{1,j}(1-R_1\mu_j^2/4) \\ B_{i,j} &= B_{i-1,j}(2-R_{i-1}\mu_j^2/2)-B_{i-2,j} \\ &\quad (j=1,2,\cdots,10;i=3,4,5) \end{aligned}\right\} \tag{2.244}$$

由 $\xi=\infty$，$\mathrm{d}U_i/\mathrm{d}\xi=1(i=1,2,\cdots,5)$，有 $A_j=0(j=6,7,\cdots,10)$，因此有

$$U_i=\xi+\sum_{j=1}^{5}A_jB_{i,j}\exp(-\mu_j\xi),\quad i=1,2,\cdots,5 \tag{2.245}$$

余下的边界条件现分为两种情形考虑。

**情形 I**　当 $b$ 根纤维(包括其中的基体元素)发生连续断裂后，断口最邻近的基体元素也发生破坏。此时，在 $\xi=0$ 处有 $\mathrm{d}U_1/\mathrm{d}\xi=\mathrm{d}U_2/\mathrm{d}\xi=0$ 及 $U_3=U_4=U_5=0$，由式(2.245)得

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{5}A_jB_{i,j}\mu_j &= 1 \quad (i=1,2) \\ \sum_{j=1}^{5}A_jB_{i,j} &= 0 \quad (i=3,4,5) \end{aligned}\right\} \tag{2.246}$$

**情形 II**　当 $b$ 根纤维(包括其中的基体元素)发生连续断裂后，断口最邻近的基体元素不发生破坏。此时，在 $\xi=0$ 处有 $\mathrm{d}U_1/\mathrm{d}\xi=0$ 及 $U_2=U_3=U_4=U_5=0$，同理有

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{5}A_jB_{1,j}\mu_j &= 1 \\ \sum_{j=1}^{5}A_jB_{i,j} &= 0 \quad (i=2,3,4,5) \end{aligned}\right\} \tag{2.247}$$

由式(2.247)可分别求得两种情形的待定常数 $A_j$，将 $A_j$ 代回式(2.245)即得位移分布。在 $\xi=0$ 处断口邻近纤维及基体的拉伸应力集中因子由下式求得

$$K_b(i)=\left.\frac{\mathrm{d}U_i}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=0}=1-\sum_{j=1}^{5}A_jB_{i,j}\mu_j,\quad i\neq 1\text{ 或 }2 \tag{2.248}$$

3. 应力集中与纤维/基体拉伸刚度比的关系

图 2.21 示出了情形 I 的纤维应力集中因子 $K_b(3)(b=1,2,\cdots,10)$与纤维/基体拉伸刚度比 $R$ 的关系曲线。由图可见，$K_b(3)(b=1,2,\cdots,10)$均随 $R$ 的增加而单

调增加，具有明显的基体拉伸刚度效应。换句话说，基体的破坏将导致较大的纤维应力集中，尤其是 $R$ 较大时。

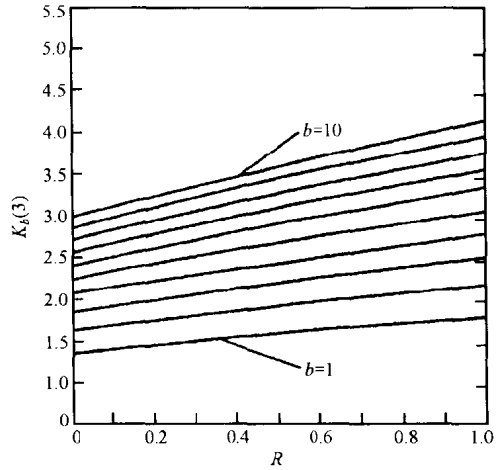



图 2.21　情形 Ⅰ 的纤维应力集中因子与 $R$ 的关系

图 2.22 示出了情形 Ⅱ 的应力集中因子与 $R$ 的关系曲线，其中 $K_b(2)$，$K_b(3)$ 分别为断口邻近的基体和纤维的应力集中因子。由图可见，两者均随 $R$ 的增加而减小，随 $b$ 的增加而增加。在 $b$ 相同的情况下，此种情形的纤维应力集中因子比情形 Ⅰ 的小，这是因为未断的基体元素分担了部分荷载。当 $R$ 较小时（如树脂基复合材料），断口邻近的基体承受很大的拉伸应力集中，且随 $b$ 的增大而增大；当 $b$ 相同时，$K_b(2)$ 远大于 $K_b(3)$。这表明，断口邻近的基体比其邻近的完整纤维先发生破坏。因此，对于受纵向拉伸的单向纤维增强复合材料来说，其破坏过程通常为：纤维→基体→纤维→基体→……。

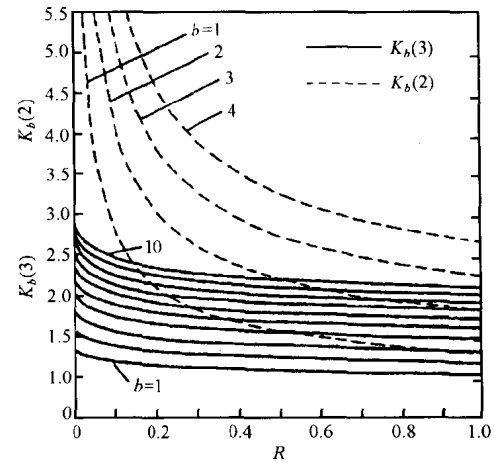



图 2.22　情形 Ⅱ 的 $K_b(2)$ 及 $K_b(3)$ 与 $R$ 的关系

图 2.23 示出了在 $\xi=0$ 处的两种情形的无量纲界面切应力与 $R$ 的关系。情形 I 中的 $\bar{\tau}_{2/3}(b)$(绝对值)随 $R$ 的增加而增加。对于情形 II，除 $\bar{\tau}_{1/2}(b)$随 $R$ 的增大而略微减小外，其他的 $\bar{\tau}_{1/2}(b)$均随 $R$ 的增加先略微减小，然后缓慢增加。

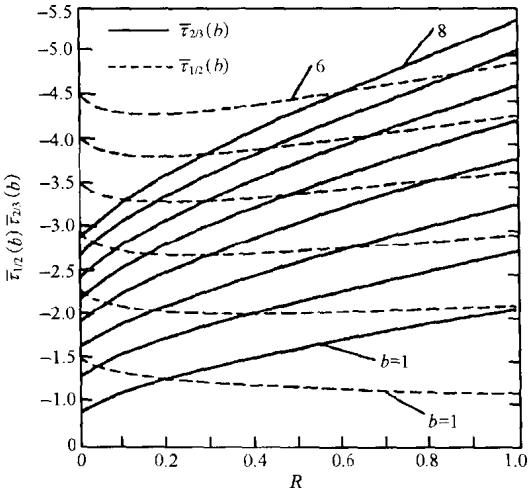



图 2.23　情形 II 的 $\bar{\tau}_{2/3}(b)$及情形 I 的 $\bar{\tau}_{1/2}(b)$与 $R$ 的关系

表 2.7 给出了 T300/5208 单向复合材料($E_f=230$ GPa，$E_m=3.45$ GPa，$E_m/E_f=0.015$)的应力集中因子随纤维体积分数 $V_f$ 的变化规律。从表中可见，情形 I 的 $K_b(3)$随 $V_f$ 的增加而减小；与此相反，情形 II 的 $K_b(2)$，$K_b(3)$则随 $V_f$ 的增加而增加。当 $V_f$ 较大(如 $V_f=0.7$)时，两种情形的纤维应力集中因子均与表 2.6 中不计基体拉力所对应的纤维应力集中因子接近。这表明，当 $R$ 较小及 $V_f$ 较大时，基体拉伸刚度效应不明显。从表中还可以看出，情形 II 的 $K_b(2)$随 $V_f$ 的增加有较大幅度的增加，因此，当 $V_f$ 较大时，断口邻近的基体较易发生破坏，从而可退化为情形 I 考虑。

**表 2.7　T300/5208 单向复合材料的应力集中因子随 $V_f$ 的变化规律($E_m/E_f=0.015$)**

| $V_f$ | 情形 I 的纤维应力集中因子 | | | | 情形 II 的纤维应力集中因子 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $K_1(3)$ | $K_2(3)$ | $K_3(3)$ | $K_4(3)$ | $K_1(3)$ | $K_2(3)$ | $K_1(2)$ | $K_2(2)$ |
| 0.1 | 1.419 4 | 1.696 5 | 1.934 0 | 2.177 1 | 1.172 8 | 1.358 4 | 2.466 0 | 3.569 6 |
| 0.3 | 1.359 2 | 1.622 9 | 1.849 0 | 2.078 1 | 1.236 8 | 1.450 9 | 4.424 7 | 6.549 5 |
| 0.5 | 1.346 7 | 1.607 6 | 1.831 5 | 2.059 2 | 1.266 6 | 1.494 4 | 6.600 0 | 9.834 9 |
| 0.7 | 1.341 0 | 1.600 9 | 1.823 9 | 2.051 4 | 1.288 7 | 1.526 4 | 9.962 1 | 14.892 8 |

计算结果表明，在单向纤维增强复合材料中，基体的横向断裂会产生较大的纤维应力集中，即具有基体拉伸刚度效应，此效应取决于 $R$ 的大小。对于 $E_m$ 较小及

$V_f$ 较大的复合材料(如树脂基复合材料),在剪滞分析中可以忽略基体的拉伸刚度(定量证实了剪滞分析中所做出的假设的合理性),对于其他情形(如金属基复合材料等),应计及基体的拉伸刚度效应。必须指出,对于像金属基复合材料的应力重分布问题,能否应用剪滞理论来分析是有疑问的,因此类材料的破坏机制与树脂基复合材料的不完全相同。

### 2.4.2 计及基体及界面破坏的剪滞分析

1. 计及基体拉力的简化剪滞模型的推广

如前所述,对大多数受纵向拉伸的单向复合材料来说,纤维的断裂往往会导致基体的横向断裂和界面的剪切破坏。下面将基于前述计及基体拉力的简化剪滞模型对具有纤维、基体和界面破坏相互作用而导致的应力重新分布问题进行研究。

图 2.24 是在图 2.19 所示模型的基础上建立的计及纤维、基体和界面破坏的剪滞模型,图中示出了各种可能发生的破坏模式。在图 2.24(a)中,当 $b$ 根纤维发生连续断裂而构成所谓的"中心断裂核"时,假定断口紧邻的纤维/基体界面首先发生剪切破坏(屈服或脱粘),然后再考虑断口邻近的基体是否发生横向断裂两种情形,即按破坏顺序分为:"中心(断裂)核→界面→基体"及"中心(断裂)核→界面"破坏模式。在图 2.24(b)中,当 $b$ 根纤维发生连续断裂时,假定断口邻近的基体首先发生横向断裂,然后再考虑此基体与其邻近的完整纤维之间的界面发生破坏,此种破坏模式称为"中心(断裂)核→基体→界面"破坏模式。不论何种破坏模式,当作用在界面上的切应力达到或超过界面剪切强度 $\tau_s$ 时,界面将发生破坏,并沿纵向扩展,界面破坏区长度仍用 $2l$ 表示。假定作用在此破坏区域内的界面切应力是常数并且也等于 $\eta\tau_s$。引进界面切应力的无量纲参数 $\bar{\tau}_s$,由式(2.237)和式(2.238)有如下关系式

$$\tau_s = \sigma_f\{(d_f G_f G_m)/[E_f(d_f G_m + d_m G_f)]\}^{1/2}\bar{\tau}_s \tag{2.249}$$

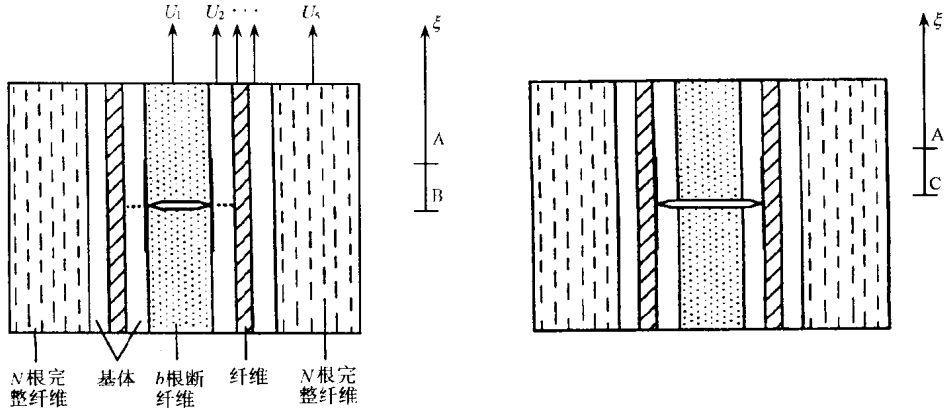



图 2.24 计及纤维、基体和界面破坏的剪滞模型

图 2.24 所示模型中的纤维和基体元素仍按图 2.19 的分组法分为 5 组，各组的位移表示、编号及分区如图所示。界面破坏区长度 $l$ 与其无量纲关系由下式给出

$$l = [E_f d_f (d_f G_m + d_m G_f)/(G_f G_m)]^{1/2} \bar{l} \tag{2.250}$$

对图 2.24(a)，(b)中的域 A($\bar{l} \leqslant \xi \leqslant \infty$)列出各组微段的无量纲剪滞平衡方程的表达式与式(2.236)完全相同，仅需将 $U$ 换成 $U^A$ 即可。

对图 2.24(a)中的域 B($0 \leqslant \xi \leqslant \bar{l}$)，各组微段的无量纲剪滞平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}
&R_1 \frac{d^2U_1^B}{d\xi^2} + 2(-\eta\tau_s) = 0 \\
&R_2 \frac{d^2U_2^B}{d\xi^2} + 2(U_3^B - U_2^B) - (-\eta\bar{\tau}_s) = 0 \\
&R_3 \frac{d^2U_3^B}{d\xi^2} + 2(U_4^B - 2U_3^B + U_2^B) = 0 \\
&R_4 \frac{d^2U_4^B}{d\xi^2} + 2(U_5^B - 2U_4^B + U_3^B) = 0 \\
&R_5 \frac{d^2U_5^B}{d\xi^2} + 2(U_4^B - 2U_5^B) = 0
\end{aligned}\right\} \tag{2.251}$$

对图 2.24(b)中的域 C($0 \leqslant \xi \leqslant \bar{l}$)，同理有

$$\left.\begin{aligned}
&R_1 \frac{d^2U_1^C}{d\xi^2} + 4(U_2^C - U_1^C) = 0 \\
&R_2 \frac{d^2U_2^C}{d\xi^2} + (-\eta\bar{\tau}_s) - 2(U_2^C - U_1^C) = 0 \\
&R_3 \frac{d^2U_3^C}{d\xi^2} + 2(U_4^C - U_3^C) + (-\eta\bar{\tau}_s) = 0 \\
&R_4 \frac{d^2U_4^C}{d\xi^2} + 2(U_5^C - 2U_4^C + U_3^C) = 0 \\
&R_5 \frac{d^2U_5^C}{d\xi^2} + 2(U_4^C - U_5^C) = 0
\end{aligned}\right\} \tag{2.252}$$

在 $\xi = \infty$，$dU_i^A/d\xi = 1 (i = 1,2,\cdots,5)$ 的条件下，由式(2.236)可求得 $U_i^A$ 的解答(式(2.245))为

$$U_i^A = \xi + \sum_{j=1}^{5} A_j B_{i,j} \exp(-\mu_j^2 \xi), \quad i = 1,2,\cdots,5 \tag{2.253}$$

式中，$A_j$ 为待定常数；$\mu_j^2$ 为矩阵 $\boldsymbol{T}_A$ 的特征值；$B_{i,j}$ 为已知常数($\boldsymbol{T}_A$ 和 $B_{i,j}$ 的表达式分别见式(2.243)和式(2.244))。

式(2.251)的通解为

$$\left.\begin{aligned}
&U_1^B = \frac{\eta\bar{\tau}_s}{R_1}\xi^2 + C_9\xi + C_{10} \\
&U_i^B = \xi + \bar{U}_i^B + \sum_{j=1}^{3} C_j D_{i,j} \exp(u_j \xi), \quad i = 2,3,4,5
\end{aligned}\right\} \tag{2.254}$$

式中，$C_1 \sim C_{10}$为未知常数；$v_j(j=1,2,\cdots,8)$为矩阵 $\boldsymbol{T}_B$ 非零特征值的正负开平方根，其中 $\boldsymbol{T}_B$ 为

$$\boldsymbol{T}_B = \begin{bmatrix} 2/R_2 & -2/R_2 & 0 & 0 \\ -2/R_3 & 4/R_3 & -2/R_3 & 0 \\ 0 & -2/R_4 & 4/R_4 & -2/R_4 \\ 0 & 0 & -2/R_5 & 2/R_5 \end{bmatrix}; \tag{2.255}$$

$D_{i,j}$为已知常数，由下式给出

$$\left.\begin{aligned} D_{2,j} &= 1 \\ D_{3,j} &= D_{2,j}(1 - R_2 v_j^2/2) \\ D_{i,j} &= D_{i-1,j}(2 - R_{i-1} v_j^2/2) - D_{i-2,j} \\ &\quad (j = 1,2,\cdots,8, i = 4,5) \end{aligned}\right\}; \tag{2.256}$$

$\bar{U}_i^B$ 为式(2.251)中后面 4 个方程的任一组特解。

式(2.252)的通解为

$$\left.\begin{aligned} U_1^C &= \frac{\eta\bar{\tau}_s}{R_1 + 2R_2}\xi^2 + \frac{M_7}{w^2}\exp(-w\xi) + \frac{M_8}{w^2}\exp(w\xi) + M_9\xi + M_{10} \\ U_2^C &= \frac{\eta\bar{\tau}_s}{R_1 + 2R_2}\xi^2 + M_7\left(\frac{1}{w^2} - \frac{R_1}{4}\right)\exp(-w\xi) \\ &\quad + M_8\left(\frac{1}{w^2} - \frac{R_1}{4}\right)\exp(w\xi) + M_9\xi + M_{10} - \frac{R_1\eta\bar{\tau}_s}{2(R_1 + 2R_2)} \\ U_i^C &= \xi + \bar{U}_i^C + \sum_{j=1}^{6} M_j N_{i,j}\exp(s_j\xi), \quad i = 3,4,5 \end{aligned}\right\} \tag{2.257}$$

式中，$w=[2(R_1+2R_2)/(R_1R_2)]^{1/2}$；$s_j$ 为矩阵 $\boldsymbol{T}_C$ 的非零特征值的正负开平方根，而

$$\boldsymbol{T}_C = \begin{bmatrix} 2/R_3 & -2R_3 & 0 \\ -2/R_4 & 4/R_4 & -2/R_4 \\ 0 & -2/R_5 & 2/R_5 \end{bmatrix}; \tag{2.258}$$

$M_1 \sim M_{10}$为待定的未知常数；$N_{i,j}$也为已知常数，由下式给出

$$\left.\begin{aligned} N_{3,j} &= 1 \\ N_{4,j} &= (1 - R_3 s_j^2/2) \\ N_{5,j} &= N_{4,j}(2 - R_4 s_j^2/2) - N_{3,j} \\ &\quad (j = 1,2,\cdots,6) \end{aligned}\right\}; \tag{2.259}$$

$\bar{U}_i^C(i=1,2,\cdots,b)$为式(2.52)后面 3 个方程的任一组特解。

对于图 2.24(a)所示的两种破坏模式，待定常数为：$A_1 \sim A_5$，$C_1 \sim C_{10}$及 $\bar{l}$；对于图 2.24(b)所示的破坏模式，待定常数为：$A_1 \sim A_5$，$M_1 \sim M_{10}$及 $\bar{l}$。这 3 种情形的待定常数均分别有 16 个，它们可由下述边界条件、连续条件及剪切条件求出：

1) 在 $\xi=0$ 处，断裂核或其邻近已断基体元素的应变或应力为零，即

$dU_1^B(0)/d\xi=0$（中心核→界面破坏模式）

$dU_1^B(0)/d\xi=dU_2^B(0)/d\xi=0$（中心核→界面→基体破坏模式）

$dU_1^C(0)/d\xi=dU_2^C(0)/d\xi=0$（中心核→基体→界面破坏模式）

2) 在 3 种破坏模式中，未断部分在 $\xi=0$ 处的位移为零，即

$U_i^B(0)=0, i=2,3,4,5$（中心核→界面破坏模式）

$U_i^B(0)=0, i=3,4,5$（中心核→界面→基体破坏模式）

$U_i^C(0)=0, i=3,4,5$（中心核→基体→界面破坏模式）

3) 在 $\xi=\bar{l}$ 处，位移应该连续，即

$$U_i^B(\bar{l})=U_i^A(\bar{l}),\quad U_i^C(\bar{l})=U_i^A(\bar{l}),\quad i=1,2,\cdots,5$$

4) 在 $\xi=\bar{l}$ 处，应变应该连续，即

$$dU_i^B(\bar{l})/d\xi=dU_i^A(\bar{l})/d\xi,\quad dU_i^C(\bar{l})/d\xi=dU_i^A(\bar{l})/d\xi,\quad i=1,2,\cdots,5$$

5) 在 $\xi=\bar{l}$ 处，作用在图 2.24(a)中“1/2”和图 2.24(b)中“2/3”界面上的切应力应分别等于界面剪切强度，即

$$2(U_2^A-U_1^A)=-\bar{\tau}_s,\qquad 2(U_3^A-U_2^A)=-\bar{\tau}_s$$

可见，3 种破坏模式均分别对应有 16 个边界条件、连续条件及剪切条件，恰好可以完全确定这些待定常数，由此可以获得位移分布的闭合解。

在 $\xi=0$ 处，断口紧邻完整纤维或基体的拉伸应力或应变集中因子可由下式求得：

$$\left.\begin{aligned}\bar{K}_b(i)&=\left.\frac{dU_i^B}{d\xi}\right|_{\xi=0},\quad i=2\text{ 和 }3\\ \bar{K}_b(3)&=\left.\frac{dU_3^C}{d\xi}\right|_{\xi=0}\end{aligned}\right\}\tag{2.260}$$

2. 算例及结果分析

给定 $N$ 及 $\eta\bar{\tau}_s$，通过数值计算即可求得无量纲界面破坏区长度 $\bar{l}$ 及纤维或基体的拉伸应力或应变集中因子。参照弹性分析结果，$N$ 的取值为：当 $b\leqslant 3$ 时，$N=b+2$；当 $b\geqslant 4$，$N=b-1$。$\eta$ 仍取为 1。

图 2.25 示出了中心核→界面→基体破坏模式中的纤维应力集中因子 $\bar{K}_b(3)(b=1,2,3,5,7)$、无量纲界面破坏区长度 $\bar{l}_b(b=1,2,3,5,7)$ 与无量纲界面剪切强度 $\bar{\tau}_s$ 的关系。图中的实线对应于 $R=0.01$（相当于碳纤维/环氧复合材料），虚线对应于 $R=0.05$（相当于玻璃纤维/环氧复合材料）。该图表明，$\bar{K}_b(3)$ 随 $\bar{\tau}_s$ 的增加而增加，增加的幅度随断纤维数 $b$ 的增加而增大；而 $\bar{l}_b$ 则随 $\bar{\tau}_s$ 的增加而减小，但随 $b$ 的增加而增加。对于任一 $\bar{\tau}_s$，较大的 $R$ 值导致较大的 $\bar{K}_b(3)$ 及 $\bar{l}_b$。对于较小的 $\bar{\tau}_s$，在 $b$ 及 $R$ 相同的情况下，具有界面破坏的纤维应力集中小于弹性情形下的应力集中（界面发生脱粘时则更小）

图 2.26 示出了中心核→界面破坏模式中的基体和纤维拉伸应力集中因子

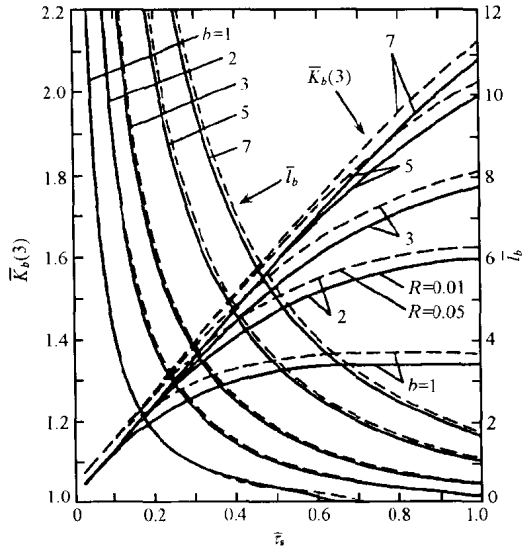



图 2.25　中心核→界面→基体破坏模式中的 $\bar{K}_b(3)$及 $\bar{l}_b$ 与 $\bar{\tau}_s$ 的关系

$\bar{K}_b(2)$,$\bar{K}_b(3)$,$\bar{l}_b(b=1,2)$与 $\bar{\tau}_s$ 的关系。该图表明,$\bar{K}_b(2)$和 $\bar{K}_b(3)$均随 $\bar{\tau}_s$ 的增加而增加(前者增加的幅度比后者大),当 $R$ 增加时,它们反而减小(减小的幅度随 $\bar{\tau}_s$ 的增加而增大);$\bar{l}_b$ 的变化趋势与图 2.25 中所对应的基本相同。对于较大的 $\bar{\tau}_s$,在 $b$ 及 $R$ 相同的情况下,此种破坏模式中的 $\bar{K}_b(3)$小于图 2.25 中的 $\bar{K}_b(3)$,这是因为断裂核邻近未断的基体分担了部分荷载,导致纤维应力集中的减小。

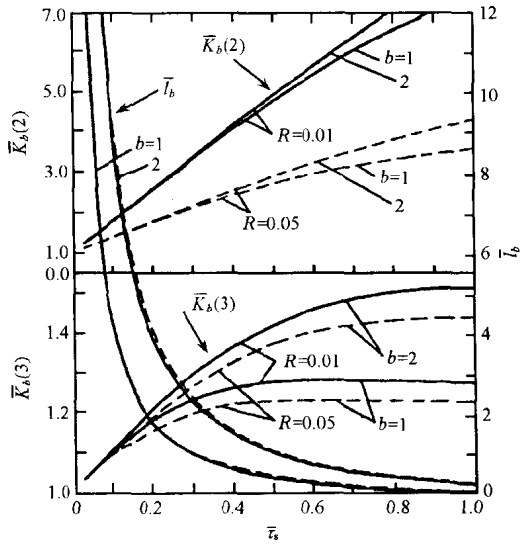



图 2.26　中心核→界面破坏模式中的 $\bar{K}_b(2)$,$\bar{K}_b(3)$,$\bar{l}_b$ 与 $\bar{\tau}_s$ 的关系

图 2.27 示出了中心核→基体→界面破坏模式中的 $\bar{K}_b(3)$ 及 $\bar{l}_b(b=1,3,5)$ 与 $\bar{\tau}_s$ 的关系。图中给出了 5 种拉伸刚度比的计算结果。由图可见，$\bar{K}_b(3)$ 也随 $\bar{\tau}_s$ 的增加而增大，$\bar{l}_b$ 随 $\bar{\tau}_s$ 的增加而减小，随 $R$ 的增加而增加。当 $b=1,3$ 及 $\bar{\tau}_s$ 较大时，$\bar{K}_b(3)$ 随 $R$ 的增加而增加，但是，当 $b=5$ 及 $\bar{\tau}_s \leqslant 0.65$ 时，$\bar{K}_b(3)$ 随 $R$ 的增加反而略微减小，仅当 $\bar{\tau}_s > 0.65$ 时，才随 $R$ 的增加而增加。从图 2.25～图 2.27 还可以看出，对于任一 $\bar{\tau}_s$ 及 $R$，$(\bar{l}_b-\bar{l}_{b-1})$ 或 $(l_b-l_{b-1})(b=2,3,\cdots)$ 近似为常数。

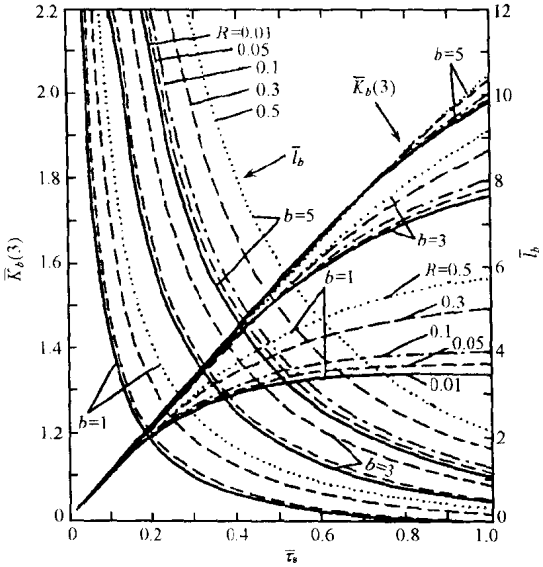



图 2.27　中心核→基体→界面破坏模式中的 $\bar{K}_b(3)$ 及 $\bar{l}_b$ 与 $\bar{\tau}_s$ 的关系

关于单向纤维增强复合材料的细观应力重新分布分析，仍有许多模型和理论未能一一列举，在此仅作一些简要的介绍。Goree 和 Gross(1979)，Dharani(1983)应用剪滞理论，研究了断口邻近的纤维/基体界面具有屈服和劈裂及邻近的几根未断的纤维具有损伤的单向金属基复合材料的应力重新分布问题，同时还考虑了断口为矩形和圆形的情形。通过适当的变换，将控制方程转换成两个积分方程来求解，其结果与实验值较为吻合。Fukuda 等(1980)提出剪滞分析的奇、偶数模型，研究了含缺口有限宽单向复合材料的应力集中问题。Nairn(1988)提出一种修正的剪滞模型，分析了含有边缘、中心缺口的有限宽单向复合材料的应力重新分布，也讨论了缺口邻近基体有屈服和劈裂的情形，同时结合线弹性断裂力学，求出了裂纹横向扩展(纤维相继断裂)和纵向劈裂时裂纹尖端处的应变能释放率，经实验证实，这种细-宏观相结合求出的应变能释放率优于经典的断裂力学解。Sastry 和 Phoenix (1993)在 Hedgepeth 理论的基础上，采用断裂影响叠加(break-influence superposition，简称 BIS)方法，研究了二维单向复合材料断裂纤维不在同一直线的应力重新分布，这种方法对求解此类问题比较简单有效。Beyerlein 等(1996)则将

纤维和基体进行适当的离散，并对 BIS 方法作了推广，分析了断口邻近纤维的应力分布和基体的切应力分布，所得结果与线弹性断裂力学的计算结果进行比较，当裂纹尺寸较大时，两者有较好的符合。Beyerlein 和 Phoenix(1996)对具有基体屈服和界面脱粘的单向复合材料提出了一种新的计算方法——二次影响叠加(quadratic influence superposition)方法，结果表明，基体损伤区域随施加荷载的增加近似线性增加，随断裂纤维数的增加为非线性增加；纤维应力集中则随基体损伤范围的增加而相应减小。

以上均假设纤维是等距排列的，而实际复合材料中的纤维往往是随机排列的。Smith (1983)，Fukuda(1985)和 Batdorf(1982)提出了各自经简化的剪滞模型，对具有随机纤维间距的复合材料应力重新分布进行了研究，结果表明，纤维间距的大小对应力集中虽然有一定的影响，但是由于求解困难，在实用上，仍作为等间距研究为好。

Wolstenhome 等(1989)基于最大似然原理，提出了一种新的统计分析方法，对纤维复合材料的应力集中进行统计推断。这种方法对进一步了解应力集中因子的性质是有益的，也有助于对复合材料统计断裂模型的适用性做出判断。

此外，剪滞理论还可以用来研究正交叠层复合材料、混杂纤维复合材料等的应力重新分布问题(见第五、七章)。

## 思 考 题

2.1 剪滞理论的假定是什么？

2.2 试求含有 5 根等间距平行排列纤维的单向复合材料，在轴向拉伸荷载 $p_0$(纤维拉力)作用下，其中间的那根已发生断裂时各纤维的位移和轴向拉力的分布，并求出各根完整纤维的应力集中因子。设各参数均与 2.1.1 中相同。

2.3 式(2.22)是如何从式(2.19)和式(2.20)中求得的？

2.4 试由式(2.45)～(2.48)，求 $K_2$ 和 $K_3$。

2.5 由 Zweben 简化的剪滞模型求得的弹性情形或非弹性情形下的应力集中因子，其结果均小于 Hedgepeth 结果，其原因是什么？如何改进？

2.6 将图 2.14 两外侧基体宽度改为 $t/2$，试求出表 2.4 中括号内的结果。

2.7 式(2.112)是如何导出的？

2.8 试求出式(2.251)中的任一组特解 $\bar{U}_i^{\mathrm{p}}$ 的表达式。

# 第三章　纤维和纤维束的统计拉伸强度

复合材料强度的测试结果表明，其拉伸强度测定值呈现明显的离散性，这是因为构成复合材料的主要受力组分材料的纤维，例如玻璃纤维、碳纤维和硼纤维等的拉伸强度就具有较大的离散性。人们已经认识到，纤维的强度与其内在的缺陷有关，有大缺陷时，其强度就低，只有小缺陷时其强度就高。一般情况下，在一定标长的纤维试件中出现大缺陷的情况不多，出现无缺陷或微小缺陷的机会也很少。表现出来的强度数据是：很低强度的试件数量是不多的，很高强度的试件数量也是很少的，大多数的试件数据落在中间某一强度范围内。可见，纤维强度的离散性是有统计规律的。本章主要讨论用概率统计和实验测定的方法来研究纤维及纤维束的统计拉伸强度。

## 3.1　概率的基本知识

下面将首先扼要列出有关概率论的基本知识。

1. 事件的定义

1）事件　把一次独立试验的结果称为一个**事件**。

2）偶然事件　如果某一事件在实验后有时发生，有时不发生，则称此事件为**偶然事件**。

3）必然事件　如果某一事件在实验后必然发生，则称此事件为**必然事件**。

4）不可能事件　如果某一事件在实验后永远不会发生，则称此事件为**不可能事件**。

在概率统计分析中，把偶然事件简称为**事件**，并以 $A,B,C,\cdots$ 表示。

2. 事件之间的关系

1）“事件 $A$ 和事件 $B$ 至少发生其中的一件”构成一个新事件，称为事件 $A$ 和事件 $B$ 之和，用 $A+B$ 表示。

2）“事件 $A$ 和事件 $B$ 同时发生”构成一个新事件，称为事件 $A$ 和事件 $B$ 之积，用 $AB$ 表示。

3）必然事件用 $U$ 表示，不可能事件用 $V$ 表示。如果“事件 $A$ 和事件 $B$ 同时发生”的事件 $AB$ 为不可能事件，即 $AB=V$，则称事件 $A$ 和事件 $B$ 为**互不相容事件**。由此还可断定此时 $A+B=U$。

4）如果两事件 $A$ 和 $\bar{A}$ 互不相容，且每次试验结果必然发生其一，也就是两事

件 $A$ 和 $\overline{A}$ 满足 $A+\overline{A}=U$ 和 $A\overline{A}=V$ 这两个条件时，则称 $\overline{A}$ 是 $A$ 的**补事件**或称 $A$ 是 $\overline{A}$ 的**补事件**。

5）如果 $n$ 个事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 满足以下两个条件：① 两两互不相容，$B_iB_j=V(i,j=1,2,\cdots,n,且\ i\neq j)$。② 每次实验结果必然发生其一，即 $B_1+B_2+\cdots+B_n=U$，则 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 构成一个**互不相容的完备事件群**。

3. 概率的定义

一个事件发生的可能性的大小称为概率。其严格的统计定义为：设在 $n$ 次试验中，如果事件 $A$ 发生了 $m$ 次，则比值 $m/n$ 称为事件 $A$ 的**频率**；当试验次数足够多时，就可以把频率 $m/n$ 作为事件 $A$ 的**概率** $P(A)$的近似值。

4. 概率的基本性质

1）任一事件 $A$ 的概率 $P(A)$必介于 0 和 1 之间，即 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$。

2）必然事件 $U$ 的概率等于 1，即 $P(U)=1$。

3）不可能事件 $V$ 的概率等于 0，即 $P(V)=0$。

5. 概率的加法定理

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是彼此互不相容事件，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n) \qquad (3.1)$$

上式表明：两两互不相容事件发生的概率等于每个事件独立发生的概率之和。

6. 概率的乘积定理

在介绍本定理之前，引进**事件独立性**的概念。若事件 $A$ 发生的概率与事件 $B$ 是否发生无关，则称事件 $A$ 对事件 $B$ 的独立。

现设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是互相独立的事件。则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) \qquad (3.2)$$

上式表明：两两互相独立的事件同时发生的概率等于每个事件单独发生的概率的乘积，此即**概率的乘积定理**。

7. 随机变量

在概率统计分析中，研究的对象主要是偶然事件及其出现、发生的规律。这些偶然事件也就是随机事件。把随机事件赋予一定的数值，这个数值是随着偶然因素按照统计规律而改变的量。我们把这种量称为**随机变量**。对应一个随机变量就代表着一个事件。

8. 概率密度(函数)

**概率密度**就是对应一个随机变量所出现的概率。如果随机变量在一定的范围内变化，则概率密度就是给定范围内的随机变量函数，也称**概率密度函数**。一般情况下，随机变量的变化范围是$(-\infty,+\infty)$，但在具体讨论纤维及复合材料的强度统计特性时，因为纤维的强度 $\sigma>0$，所以这里的随机变量的变化范围是$(0,+\infty)$。用 $f(\xi)$表示随机变量 $\xi$ 的概率密度函数，且 $0<\xi<\infty$。

9. 概率累积分布函数

如果用 $F(\sigma)$ 表示**概率累积分布函数**，则

$$F(\sigma) = \int_0^{\sigma} f(\xi)\mathrm{d}\xi = P(\xi < \sigma) \tag{3.3}$$

此即强度 $\xi$ 不超过(或小于)某值 $\sigma$ 的概率。显然

$$P(\xi < \infty) = \int_0^{\infty} f(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{3.4}$$

10. 随机变量的数学期望

随机变量的**数学期望**用下式定义

$$E(\xi) = \int_0^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x \tag{3.5}$$

可见，$\xi$ 的数学期望是以概率为加权的平均值，它代表随机变量分布的集中位置。

11. 随机变量的方差和标准差

随机变量的**方差**由下式定义

$$D(\xi) = \mathrm{Var}(\xi) = \int_0^{\infty} [x - E(\xi)]^2 f(x)\mathrm{d}x \tag{3.6}$$

它是衡量随机变量分布离散性的一个特征量。方差小，表示随机变量分布比较集中；方差大，则代表随机变量的分布较分散。

随机变量的**标准差**或**均方差**为

$$H(\xi) = \sqrt{\mathrm{Var}(\xi)} \tag{3.7}$$

12. 数学期望与方差之间的关系

$$\mathrm{Var}(\xi) = E(\xi^2) - [E(\xi)]^2 \tag{3.8}$$

13. 几种常见的概率密度函数及累积分布函数

在材料的强度统计分析中，常用的概率密度函数是**正态分布**和**韦布尔**(Weibull)分布函数。此外还有二项式分布、伯努利分布及泊松分布等。

1) 正态分布　正态分布的概率密度函数由下式表示

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2s^2}\right] \tag{3.9}$$

式中，$s$ 和 $\bar{x}$ 是正态分布的两个特征参数，分别表示标准差和数学期望

$$H(\xi) = s, \quad E(\xi) = \bar{x} \tag{3.10}$$

正态分布的累积分布函数 $F(\sigma)$，即随机变量 $x$ 小于某一数值 $\sigma$ 的概率 $P(x<\sigma)$ 是

$$F(\sigma) = P(x < \sigma) = \int_0^{\sigma} f(x)\mathrm{d}x \tag{3.11}$$

2) 韦布尔分布　普通形式的韦布尔分布由下式表示

$$F(\sigma) = \begin{cases} 0 & \sigma \leqslant \sigma_u \\ 1 - \exp\left[-\dfrac{(\sigma - \sigma_u)^{\beta}}{\sigma_0}\right] & \sigma > \sigma_u \end{cases} \tag{3.12}$$

式中，$\beta$ 是**形状参数**；$\sigma_0$ 为**尺度参数**；$\sigma_u$ 为位置参数。当应用式(3.12)讨论材料强度的统计特性时，由于强度分布不可能取负值，故常取 $\sigma_u=0$。

## 3.2 纤维强度分布的统计特性

由于工艺、环境等因素的影响，纤维表面和内部不可避免地存在许多缺陷(蚀点、蚀坑、刻痕、微裂纹等)，脆性纤维(如玻璃纤维、碳纤维、硼纤维等)的拉伸强度主要与表面损害分布有关，由这些表面缺陷中最厉害的一个所控制。而这些缺陷的分布又是随机的，故纤维强度取决于随机分布的缺陷中最厉害者这种性质决定了强度本身也是一个随机量，而且服从于一般的**极值分布理论**。

Coleman (1958) 在检验长纤维的强度时发现：①对某一纤维进行拉伸试验时，该纤维通常在其最弱截面处发生断裂。② 纤维的强度与纤维长度有关。③纤维的累积强度分布函数 $P_f(\sigma_f)$ 为纤维拉伸应力 $\sigma_f$ 的某一单调增函数。Coleman 假定纤维可看成由 $n$ 个无相互作用的单位长的短纤维所串成，见图 3.1.1 单位长的纤维相当于链条中的一节链(或称为环)。他进一步假定某纤维的所有链节均有同样的累积强度分布函数 $P(\sigma_i)$。

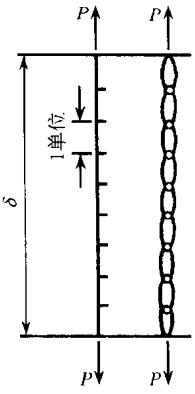


图 3.1 纤维的链式模型

一链节的强度大于 $\sigma_f$ 的概率为 $1-P(\sigma_f)$，所有链节在 $\sigma_f$ 作用下均不破坏的概率则为 $[1-P(\sigma_f)]^n$(见式(3.2))。因此，在 $\sigma_f$ 作用下，至少一链节断裂的概率是

$$P_f(\sigma_f)=1-[1-P(\sigma_f)]^n \tag{3.13}$$

$P_f(\sigma_f)$ 可以看为纤维强度的累积分布函数。

Coleman 指出，$P(\sigma_f)$ 具有韦布尔分布的形式。对于长纤维($n\to\infty$)，式(3.13)给出了破坏的累积概率

$$P_f(\sigma_f)=1-\exp\left[-L\left(\frac{\sigma_f}{\sigma_0}\right)^{\beta}\right] \tag{3.14}$$

$P_f(\sigma_f)$ 为某纤维在应力水平等于或小于 $\sigma_f$ 下的破坏概率。这里，$L$ 是关于某一参考长度的长度比，$\sigma_0$ 为单位纤维长度比(即 $L=1$)的尺度参数，$\beta$ 为形状参数，它们均为材料常数，通常由试验确定。由式(3.14)可得概率密度函数

$$p_f(\sigma_f)=L\sigma_0^{-\beta}\beta\sigma_f^{\beta-1}\exp\left[-L\left(\frac{\sigma_f}{\sigma_0}\right)^{\beta}\right] \tag{3.15}$$

上式表明，纤维强度与其长度有关。此外，由上式可分别算出强度的数学期望(即统计平均纤维强度 $\bar{\sigma}_f$)和标准差

$$\bar{\sigma}_f=\int_0^{\infty}\sigma_f p_f(\sigma_f)\mathrm{d}\sigma_f=\sigma_0 L^{-1/\beta}\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right) \tag{3.16a}$$

$$s=\int_0^{\infty}(\sigma_f-\bar{\sigma}_f)^2 p_f(\sigma_f)\mathrm{d}\sigma_f=\sigma_0 L^{-1/\beta}\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.16b}$$

式中，符号 $\Gamma$ 表示伽马函数。纤维强度的离散系数定义为

$$CV=\frac{s}{\sigma_f}=\left[\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}-1\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.17}$$

可见，纤维强度的离散系数与纤维长度无关。当 $\beta$ 增加时，$CV$ 值减小。由于 $\beta$ 是与材料性能有关的常数，故不同的材料，其 $\beta$ 值也不同。对于常见的纤维或材料，$\beta\approx 1.2/CV$。可见，$\beta$ 是材料离散度的倒数。若 $\beta$ 值介于 2～20 之间，则有 $CV\approx\beta^{-0.92}$。脆性纤维的 $\beta$ 值通常介于 2～4 之间；塑性金属的 $\beta\approx 20$；石墨纤维的 $\beta\approx 4$；硼纤维的 $\beta$ 值介于 2.7～5.8 之间；玻璃纤维的 $\beta\approx 11$。式(3.16)中的因子 $\sigma_0 L^{-1/\beta}$ 通常称为纤维的**特征强度**水平。

Manders 和 Chou (1983) 指出，关于纤维强度的韦布尔分布中的尺寸和形状参数，可以通过各种实验测试进行估算。首先，对式(3.16a)两边取对数，由此可看到 $\ln\bar{\sigma}_f$-$\ln L$ 图是一根斜直线，其斜率为 $-1/\beta$。对一系列标准长度的单纤维进行测试，从而获得形状参数。其次，在合适的对数坐标轴上绘出累积分布图。做法如下：纤维不破坏的累积概率由下式表示：

$$P_s=1-P_f \tag{3.18}$$

将式(3.14)代入上式并取对数后得

$$\ln P_s=-L\left(\frac{\sigma_f}{\sigma_0}\right)^{\beta} \tag{3.19}$$

上式两边乘上负号再取对数得

$$\ln(-\ln P_s)=\ln L+\beta\ln\sigma_f-\beta\ln\sigma_0 \tag{3.20}$$

由上式可做出在给定标距长度下的 $\ln(-\ln P_s)$-$\ln\sigma_f$ 图，即**双对数韦布尔图**，它也是斜率为 $\beta$ 的一根斜直线。由直线的截距就可以得到尺度参数。上述步骤需测试很多纤维。

如果纤维沿着它的长度能均匀地承受拉伸应力作用，那么，它有可能断裂成许多不等长的微段，这些微段的平均长度随施加应力的增加而减小。在任意给定的应力下，微段之间的长度分布服从式(3.19)的指数分布，绘出的 $\ln(P_s)$-$L$ 图应是斜率为

$$\text{gradient}=-(\sigma_f/\sigma_0)^{\beta}$$

的一根斜直线。上式两边乘负号，再取对数，得

$$\ln(-\text{gradient})=\beta\ln\sigma_f-\beta\ln\sigma_0 \tag{3.21}$$

可见，$\ln(-\text{gradient})$-$\ln\sigma_f$ 图是斜率为 $\beta$ 的一根斜直线。

## 3.3 纤维束强度的统计分析

纤维束强度的统计分析，除自身的实用性外，也是由纤维过渡到复合材料统计分析的中间环节。由 $N$ 根等长纤维组成的纤维束强度，似乎应是各纤维强度的平均值，但实际并非如此。Daniels(1945) 指出，若各纤维的横截面面积均相同，其应力应变曲线的形状也相同，则对于 $N$ 很大的一束纤维，其拉伸强度 $\sigma_b$ 近似服从正态分布

$$p_b(\sigma_b) = \frac{1}{s_b\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\sigma_b - \bar{\sigma}_b)^2}{2s_b^2}\right] \tag{3.22}$$

式中，$\sigma_b$ 为纤维束破坏荷载除以总的纤维横截面面积；$p_b(\sigma_b)$ 是纤维束强度的概率密度分布函数；$\bar{\sigma}_b$ 为纤维束的统计平均强度($\sigma_b$ 的数学期望)，由下式确定

$$\bar{\sigma}_b = \sigma_{fmax}[1 - P_f(\sigma_{fmax})] \tag{3.23}$$

式中，$P_f(\sigma_{fmax})$ 是累积纤维强度分布函数；$\sigma_{fmax}$ 是由 $\sigma[1-P_f(\sigma)]$ 取最大值解出，即

$$\frac{d}{d\sigma}\{\sigma[1 - P_f(\sigma)]\}|_{\sigma=\sigma_{fmax}} = 0 \tag{3.24}$$

上式表明，纤维束承受的荷载在破坏时达最大值，从这个条件中，可以找出最大纤维应力 $\sigma_{fmax}$；$s_b$ 为纤维束强度的均方差

$$s_b = \sigma_{fmax}\{P_f(\sigma_{fmax})[1 - P_f(\sigma_{fmax})]\}^{\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{2}} \tag{3.25}$$

假定 $P_f(\sigma_f)$ 为韦布尔分布(见式(3.14))，则可以分别得到长为 $L$ 的纤维束的最大纤维应力 $\sigma_{fmax}$ 及其统计平均强度 $\bar{\sigma}_b$

$$\sigma_{fmax} = \sigma_0(L\beta)^{-1/\beta} \tag{3.26}$$

$$\sigma_b = \sigma_0(eL\beta)^{-1/\beta} \tag{3.27}$$

式(3.27)意指未断纤维的比例为 $\exp(-1/\beta)$。式(3.27)与式(3.16a)的比值

$$\frac{\bar{\sigma}_b}{\bar{\sigma}_f} = \left[\beta^{1/\beta}\exp(\beta^{-1})\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]^{-1} \tag{3.28}$$

称为“Coleman 因子”。可见，在长度相同的情形下，纤维束的平均强度比纤维的平均强度低，其原因是束强度与纤维的离散度有关。如果束中组分纤维的强度无离散性，则有 $\bar{\sigma}_b=\bar{\sigma}_f$；当纤维强度的离散度由零开始增加时，束强度单调减小；若纤维强度的离散度趋于无穷大，束强度趋于零；当纤维强度的离散度大约是 17%时，$\bar{\sigma}_b/\bar{\sigma}_f \approx 70\%$。

式(3.28)给出的比值与纤维长度无关。与单纤维强度与其长度有关类似，束强度也随其长度的增加而减小。因此，同样可绘出 ln(束强度)-ln(长度)图来确定韦布尔参数。

上述的纤维束模型认为，所有纤维均有相同的强度分布，而且各纤维的断裂相互无关；未断纤维的伸长均相同；一根纤维断裂后即整根失效，其荷载由未断纤维

平均分担(**平均荷载分担法则**);不考虑基体的作用或纤维间的摩擦。对于基体和界面很脆弱的情形,可用纤维束模型来初步估算复合材料的强度。

## 3.4 单纤维强度与纤维束强度之间的相互关系

式(3.16a)表明,通过测试不同标距长度的纤维的强度,可以确定单纤维强度的韦布尔形状参数。然而,这样的测试却存在一些不足之处:① 从纤维束中抽取纤维单丝及对直径非常小的纤维进行大量的试验是非常繁琐的;② 从束中抽取纤维单丝,通常会选择较强或较好的纤维,因为在此过程中,较弱纤维易于损伤和断裂;③ 基于激光衍射条纹的实验表明,由于纤维加捻,被测试纤维的直径沿其长度有所改变,其截面并非圆形。

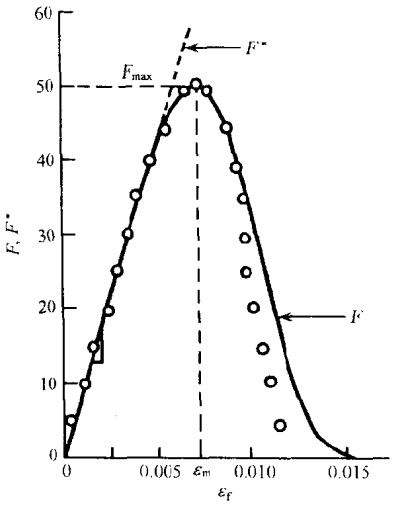



图 3.2 纤维束的 $F$-$\varepsilon_f$ 的理论与实验结果比较

较理想的方法是通过测试不同标距长度的纤维束的强度,来确定单纤维强度的韦布尔形状参数。

下面,首先导出受拉伸荷载作用的纤维束的荷载-应变关系的理论表达式。其次,通过分析荷载-应变曲线,采用两种方法确定单纤维强度的韦布尔分布参数。图 3.2 示出了某一碳纤维束受位移控制的拉伸实验结果。

### 3.4.1 分析

单纤维强度与纤维束强度之间的相互关系是基于下述假定而建立起来的:

1) 纤维的拉伸强度服从韦布尔分布函数 $P_f(\sigma_f)$,见式(3.14);

2) 从开始加载至试样断裂全过程,单纤维的应力 $\sigma_f$ 与应变 $\varepsilon_f$ 服从胡克定律

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_f \tag{3.29}$$

3) 在纤维束拉伸试验期间,任意时刻,施加荷载都均匀地分配给存活纤维。

为了建立拉伸荷载-应变($F$-$\varepsilon$)关系,式(3.14)按照纤维应变重写如下

$$P_f(\varepsilon_f) = 1 - \exp\left[-L\left(\frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_0}\right)^{\beta}\right] \tag{3.30}$$

式中,$\varepsilon_0$ 为单位纤维长度(即 $L=1$)的尺度参数,由下式给出

$$\varepsilon_0 = \sigma_0 / E_f \tag{3.31}$$

假定束中的纤维满足均匀应变条件。在施加应变 $\varepsilon_f$ 作用下,$N$ 根等长纤维组成的纤维束中的存活纤维数目 $N_0$ 由下式求出

$$N_0 = N[1 - P_f(\varepsilon_f)] = N\exp\left[-L\left(\frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_0}\right)^{\beta}\right] \tag{3.32}$$

而 $N_0$ 与施加在纤维束上的拉伸力 $F$ 有关，它们之间的关系为

$$F = \sigma_f A_f N_0 \tag{3.33}$$

将式(3.29)和式(3.32)代入式(3.33)，有

$$F = A_f E_f \varepsilon_f N\exp\left[-L\left(\frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_0}\right)^{\beta}\right] \tag{3.34}$$

式(3.34)给出了受拉伸荷载作用下的纤维束的 $F$-$\varepsilon_f$ 的关系曲线。如果已知 $A_f$，$N$，$L$，$E_f$，$\varepsilon_0$ 及 $\beta$ 的值，则可以绘出纤维束的 $F$-$\varepsilon_f$ 的关系曲线。图 3.2 中的实线示出了理论估计的结果。

根据式(3.34)，$F$-$\varepsilon_f$ 曲线是连续而光滑的，当达到最大荷载 $F_{max}$ 后，作用在纤维束上的拉力逐渐减小至零。曲线在 $\varepsilon_f = 0$ 处的斜率为

$$S_0 = A_f E_f N \tag{3.35}$$

由 $F$-$\varepsilon_f$ 曲线在 $\varepsilon_f = 0$ 处的切线所定义的拉伸荷载为

$$F^* = A_f E_f N \varepsilon_f \tag{3.36}$$

基于 $F$-$\varepsilon_f$ 关系，束中的单纤维的存活概率可以由式(3.34)和式(3.36)确定。

$$F/F^* = 1 - P_f(\varepsilon_f) = P_s \tag{3.37}$$

然后，由 $dF/d\varepsilon_f = 0$，可以求出在 $F$-$\varepsilon_f$ 曲线中相应于最大荷载的应变 $\varepsilon_m$，即

$$\varepsilon_m = \varepsilon_0\left(\frac{1}{L\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} \tag{3.38}$$

这样，最大荷载是

$$F_{max} = A_f N E_f \varepsilon_0\left(\frac{1}{L\beta e}\right)^{\frac{1}{\beta}} \tag{3.39}$$

式中，e = 2.718 28…。图 3.2 中，从坐标原点到点($F_{max}$，$\varepsilon_m$)连成的直线的斜率从式(3.35)、式(3.38)及式(3.39)中求出

$$S = F_{max}/\varepsilon_m = S_0\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{\beta}} \tag{3.40}$$

从上式可求出

$$\beta = 1/\ln\left(\frac{\varepsilon_m S_0}{F_{max}}\right) \tag{3.41}$$

### 3.4.2 单纤维强度分布

1984 年 Chi、Chou 和 Shen 基于纤维强度与束强度关系的分析，提出了下述从纤维束测试中确定单纤维强度分布(形状参数 $\beta$ 和尺度参数 $\varepsilon_0$)的两种方法，并且构造了 $F$-$\varepsilon_f$ 的理论曲线。

1. 方法一

方法一基于式(3.30)、式(3.37)及 $F$-$\varepsilon_f$ 的实验曲线，步骤简述如下：

1) 由式(3.35)和纤维束的 $A_f$，$E_f$ 及 $N$ 的数据计算 $S_0$。

2) 由式(3.36)计算 $F^*$，$F^*=S_0E_f$。从 $F$-$\varepsilon_f$ 曲线中量取 $F$，然后从式(3.37)确定纤维的存活概率 $P_s(\varepsilon_f)=F/F^*$。

3) 形状参数 $\beta$ 由基于

$$\ln(-\ln P_s)=\ln L+\beta\ln\varepsilon_f-\beta\ln\varepsilon_0 \tag{3.42a}$$

关系的双对数韦布尔 $\ln(-\ln P_s)-\ln\varepsilon_f$ 图的斜率中求得。

4) 尺度参数 $\varepsilon_0$ 可以利用实验测定的 $\varepsilon_m$ 值再由式(3.38)确定，也可由 $\ln(-\ln P_s)$-$\ln\varepsilon_f$图中量取 $\ln L-\beta\ln\varepsilon_0$ 值求得。

2. 方法二

在方法二中，$F_{max}$和 $\varepsilon_m$ 从实验中获得。计算步骤是

1) 分别由式(3.35)、式(3.41)及式(3.38)中确定 $S_0$，$\beta$ 和 $\varepsilon_0$。

2) 将式(3.35)代入式(3.34)，得 $F$-$\varepsilon_f$ 关系式

$$F=\varepsilon_f S_0\exp\left[-L\left(\frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_0}\right)^{\beta}\right] \tag{3.42b}$$

## 3.5 韦布尔形状参数的实验测定

我们知道，韦布尔形状参数 $\beta$ 给出了强度数据分散性的一种度量。在 $P_f(\sigma_f)$-$\sigma_f$ 图中，韦布尔形状参数 $\beta$ 值愈大，强度分布的范围愈窄。前述关于韦布尔形状参数估计的讨论总结如下(方法 1～3 用于纤维单丝，方法 4～6 用于纤维束)。

1) 统计平均强度随长度的变化　该方法需要进行不同标距长度的试验，并测出纤维直径以获得真实的应力。

2) 固定标距长度的强度分布　测出纤维直径以获得真实的应力。该方法测量固有的变化性，也测量由实验技术引入的人为离散性。

3) 纤维单丝多级断裂之间的长度分布　以应变为基础进行估计，而非应力。该方法需要修正接近断裂时的应变非均匀性。

4) 统计平均强度随长度的变化　该方法假定各纤维的直径和刚度均相同。

5) 从荷载-应变曲线中获得存活纤维的比例。以应变为基础进行估计，而非应力。此方法假定各纤维均相同。

6) 荷载-应变曲线的初始斜率的确定及与作用在束上的最大荷载对应的应变的确定。

Manders 等(1983)从牌号为“大力神 AS-4”无捻纤维束(每束含 12 000 根纤维)中抽取一批碳纤维单丝进行拉伸试验，基于方法 1～4 确定了韦布尔形状参数。他们还对牌号为“圣·哥边 DCN56” E-玻璃无捻纤维束进行了试验，由方法 4 和

方法 5 获得了韦布尔形状参数。有些研究者则采用 T-300 碳纤维单丝和纤维束(每束含 1 000 根碳纤维)检验了方法 1、方法 2、方法 5 及方法 6。

### 3.5.1 纤维单丝试验

为了获得纤维单丝的强度及其分布,需要测定纤维单丝的直径及拉伸破坏荷载。对于纤维直径的测定,Chi 和 Chou 使用氦-氖激光,从激光散射条纹中测出纤维直径。结果表明,T-300 碳纤维的平均直径是 7.2μm,标准差为 0.2μm。

采用标距长度分别为 10mm,30 mm 和 60 mm 的纤维进行强度测定,测试的纤维数量分别为 80 根、81 根和 64 根,其结果示于韦布尔概率纸上,见图 3.3 所示。这里,$\sigma_f$ 表示纤维最终拉伸强度,$P_f(\sigma_f)$为应力等于或小于 $\sigma_f$ 时的纤维破坏累积概率,而 $\ln\{-\ln[1-P_f(\sigma_f)]\}$则为破坏概率的一种表示。从图中可以看到,除长为 60 mm 纤维的低强度范围及长为 10 mm 和 30 mm 纤维的高强度范围外,纤维破坏概率随强度的变化基本上是线性的。

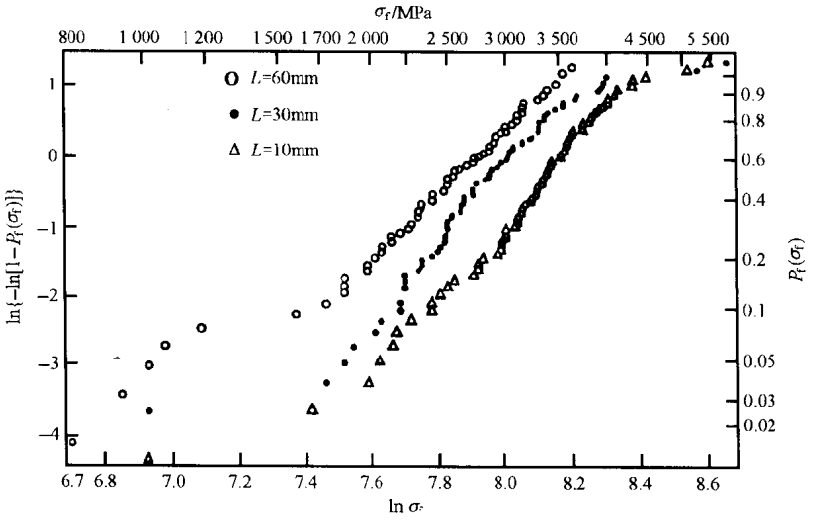



图 3.3 各种标距长度纤维的拉伸实验结果

由试验数据绘出 $\ln\bar{\sigma}_f$-$\ln L$(见式(3.16a))图如图 3.4 所示,按方法 1 可以获得韦布尔形状参数 $\beta$。测量图中直线斜率得出 $\beta=6.2$。值得注意的是,由于强度的高离散性,故需要进行大量的高精度试验来确定韦布尔分布是否为强度的一种精确描述,同时也可说明用纤维束进行试验的优点何在。如果基于方法 2,则可从图 3.3 中的 $\ln\{-\ln[1-P_f(\sigma_f)]\}$-$\ln\sigma_f$(见式(3.38))数据的线性部分量取斜率。三组数据的分布均为线性而且大致平行。量取这些斜率后取平均值,得出形状参数为 5.3。

方法 3 需要进行纤维单丝的多级断裂试验。在 Manders 和 Chou(1983)的实验中,首先在厚约 50μm 的黏性聚苯乙烯薄膜上铺满 2 mm 厚的 PVC 胶,然后,把

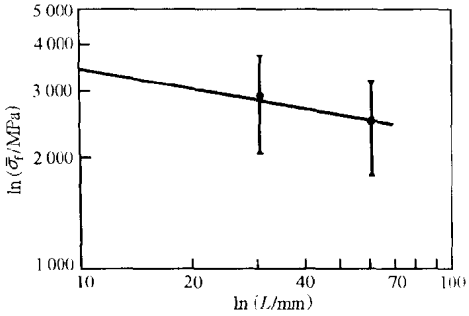



图 3.4　确定 $\beta$ 的 $\ln\bar{\sigma}_f$-$\ln L$ 图

碳纤维粘贴在 PVC 胶层的表面，并将其拉直。黏结剂固化后就可以进行拉伸试验了。由于胶层的拉伸破坏应变比纤维的拉伸破坏应变大得多，故当纤维在较弱处断裂后，这根纤维并不完全丧失承载能力，在离开断口某一适当长度以外的部分纤维仍然具有承担定量外载的能力。这是因为纤维与黏结剂之间具有抗剪能力，从而使断口附近的纤维承受的拉伸荷载由断口为零开始逐渐增大到一定值。这时，纤维与黏结剂之间的切应力，在断口附近很大，然后逐渐减小为零。随着荷载的增加，纤维将在另一较弱处发生断裂，如此发展下去，纤维可能断裂成许多不等长的微段，这些微段的平均长度随施加应力的增加而减小。使用便携式显微镜测定每一应变水平下纤维断裂之间的长度，并在对数坐标轴上绘出其累积分布。按照式(3.19)，这些分布应该是线性的且通过坐标原点，但是，当它们是比较直的时候，将与断裂间距轴线相交于某个正的截距。由这个截距给出的最小裂纹间距表示有效的“不受应力”的纤维长度，超过这一长度，荷载逐渐增大。绘出的斜率的对数与应变的对数图中，低应变区的曲线是比较直的，该直线段的斜率约为 $\beta=6.4$；而高应变区的曲线则成为水平直线，因为纤维从黏结的薄膜中脱胶且无新的断裂发生。尽管有此缺点，与其他技术相比，这个技术仍然能够测量较短纤维的形状参数。

Henstenburg 和 Phoenix(1989)利用从纤维单丝多级断裂试验中获取的数据，考虑了测量纤维强度的韦布尔参数问题。采用蒙特卡罗模拟技术，得出了应用于长度等于平均碎断(fragmentation)长度的纤维的一种简单方法。

### 3.5.2　纤维束试验

在 Manders 和 Chou(1983)基于方法 4 的纤维束试验中，首先把各种标距长度的纤维束的两端粘接在槽型夹头中，然后经特殊的处理以确保不出现松散的纤维。对每一种标距长度，获得了 5～10 个结果，采用与单纤维试验同样的方法将这些结果绘于图 3.5。纤维束的横截面面积从厂家提供的密度和每单位长度的质量中算出。因为纤维束的破坏涉及许多纤维的孤立断裂，所以，纤维束强度的分散性比纤维单丝的小得多。对于标距长度在 10～200 mm 之间的纤维和纤维束，相同长度的碳纤维束与碳纤维单丝的平均强度之比为 0.67～0.85。由式(3.28)可以求出 $\beta$ 为 5 和 10 的 Coleman 因子分别是 0.65 和 0.76。可见，理论与实验结果虽有些差异但仍较符合。存在的差异也许是由于：①强度并不完全服从韦布尔分布；②测量纤维的光学技术过高地估计了非圆形纤维的横截面面积；③在纤维束中预

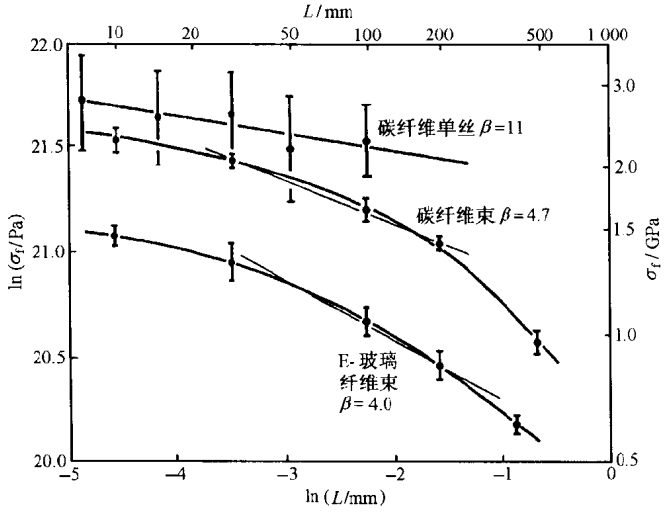



图 3.5　碳纤维单位及碳和玻璃纤维束的平均强度与长度的关系

先存在有断纤维，纤维束愈长，预先存在的断纤维的数目就愈多。

值得注意的是，标距长度愈大，纤维单丝和纤维束两者的强度变化性愈大，这一现象可以通过严重缺陷的分布情况来说明。大多数短标距长度的试样可能不含有严重的缺陷，而且缺陷的个数对平均强度的影响较小；但是，对于标距长度较大的试样，很可能含有一个或多个严重的缺陷，这样，它们的强度将显著降低。研究者们对玻璃纤维的类似行为进行观察后建议，采用 2 个形状参数、2 个尺度参数的“双”韦布尔分布来描述纤维或纤维束可能更合适。

在 Chi、Chou 和 Shen(1984)的纤维束试验中，形状参数和尺度参数是根据方法 5 和方法 6(相当于 3.4 节的方法一和方法二)来确定的。相关数据是：$N=1\,000$，纤维直径 $d_f=7\mu m$，$E_f=225$ GPa，标距长度＝60 mm。从方法 5 和方法 6 获得的形状参数分别是 4.6 和 4.5；由两种方法确定的相应于单位纤维长度(1 mm)的尺度参数 $\varepsilon_0$ 均为 0.026。实验数据点表示的荷载-应变($F$-$\varepsilon_f$)关系示于图 3.2，由图可见，在纤维束应变比相应于最大荷载的应变($\varepsilon_m$)不很大的范围内，理论与实验之间的一致性是相当令人满意的。

## 思　考　题

3.1　常用纤维的韦布尔形状参数 $\beta$ 介于何值之间？

3.2　如何从单纤维拉伸实验中获取韦布尔形状参数 $\beta$？

3.3　纤维束的平均强度比纤维的平均强度低，其原因是什么？

3.4　单纤维强度与纤维束强度之间有何相互关系？

# 第四章　单向纤维复合材料的纵向拉伸强度

根据相材料的强度性能从理论上导出复合材料的基本强度参量(主要是沿轴强度)是目前细观强度分析的中心问题。由于对强度问题起主导作用的往往是各相材料的协同效应，所以比起刚度问题(有效模量问题——起主导作用的是“混合(平均)”效应)要复杂得多。何况破坏过程本身是个变动过程，即从某处出现第一破坏开始，历经相继破坏，直至最终整体破坏。本章首先介绍预报单向纤维增强复合材料拉伸强度的材料力学半经验法，然后着重介绍国际上流行较广的链式统计模型及其简化理论，最后介绍由曾庆敦等人提出的随机扩大临界核模型和理论。

## 4.1　材料力学半经验法

在材料力学方法中，求单向连续纤维增强复合材料的纵向拉伸**强度** $\sigma_{cu}$，是将复合材料看成为“套筒式”的受拉超静定弹性杆系(图 4.1(a))。对于常见的纤维和基体，其应力-应变关系如图 4.1(b)所示。当复合材料受拉时，由图 4.1(a)所示力的平衡条件，有

$$\sigma_c A_c = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m \tag{4.1}$$

式中，$\sigma_c$，$\sigma_f$ 和 $\sigma_m$ 分别为复合材料、纤维、基体的应力；$A_c$，$A_f$ 和 $A_m$ 分别为复合材

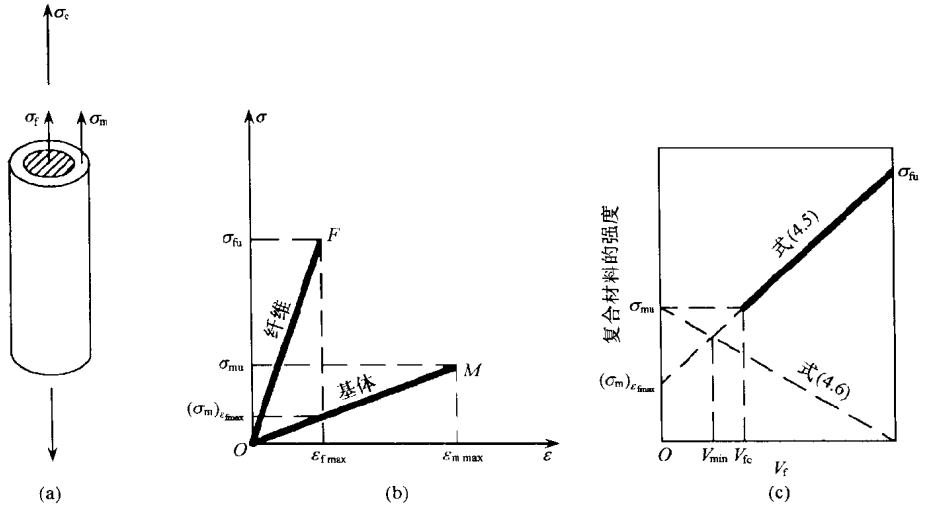



图 4.1　用材料力学方法计算单向复合材料的纵向拉伸强度

料、纤维、基体的横截面面积。令

$$V_f = A_f/A_c, \quad V_m = A_m/A_c \tag{4.2}$$

分别为复合材料中纤维和基体的**体积分数**，将其代入式(4.1)，得

$$\sigma_c = \sigma_f V_f + \sigma_m V_m \tag{4.3}$$

上式为复合材料的应力与纤维、基体的应力的关系。这样，复合材料的纵向拉伸强度可表示为

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu} V_f + \sigma_{mu}(1 - V_f) \tag{4.4}$$

式中，下标 u 指最终强度。式(4.4)仅当**纤维与基体具有相同的拉伸破坏应变**才有效。

事实上，式(4.4)在确定单向连续纤维增强复合材料的纵向拉伸强度时是不够充分的。Aveston、Cooper 和 Kelly(1971)根据纤维/基体界面上的荷载传递和破坏模式讨论了复合材料的强度。对于**脆性纤维增强塑性基体**，基体的破坏应变通常比纤维的破坏应变高得多(见图 4.1(b))。当应变达到 $\varepsilon_{fmax}$，纤维的应力达到其强度值 $\sigma_{fu}$而破坏，这时复合材料的最大应力为

$$\sigma_{cmax} = \sigma_{fu} V_f + (\sigma_m)_{\varepsilon_{fmax}}(1 - V_f) \qquad \text{(纤维控制强度)} \tag{4.5}$$

纤维破坏后($\sigma_f = 0$)，全部荷载由基体承担。这时复合材料所能承受的最大应力为

$$\sigma'_{cmax} = \sigma_{mu}(1 - V_f) \qquad \text{(基体控制强度)} \tag{4.6}$$

根据式(4.5)和式(4.6)作图 4.1(c)。从该图可见：当 $V_f < V_{min}$(最小纤维体积分数)时，$\sigma'_{cmax} > \sigma_{cmax}$，由基体控制强度；当 $V_f > V_{min}$时，$\sigma_{cmax} > \sigma'_{cmax}$，由纤维控制强度。设计复合材料时，必须使复合材料的强度不小于基体的强度 $\sigma_{mu}$，否则无意义。因此在图 4.1(c)中表示复合材料的两直线(式(4.5)和式(4.6))，只有式(4.5)对应的实线段才有意义。为了实现这个情形，必须使纤维体积分数 $V_f$ 不小于某一临界值 $V_{fc}$，即应使

$$V_f \geqslant V_{fc} \tag{4.7}$$

这一临界值可从图 4.1(c)中按比例关系求得

$$V_{fc} = \frac{\sigma_{mu} - (\sigma_m)_{\varepsilon_{fmax}}}{\sigma_{fu} - (\sigma_m)_{\varepsilon_{fmax}}} \tag{4.8}$$

式(4.5)称为复合材料纵向拉伸强度的**混合律**(rule-of-mixture)。

值得注意的是，当 $V_f < V_{fc}$时，随着作用在基体或复合材料上的应变增加，纤维将断裂成越来越短的小段，因此，此种情形的复合材料破坏可由纤维的多级破坏(multiple fracture)来描述。只要基体的破坏应变足够大，纤维将断裂成长为 $x \sim 2x$ 之间的小段。假定作用在纤维/基体界面上的切应力 $\tau$ 是常数，从简单的力平衡中，可求得纤维的断裂间距为

$$x = \frac{\sigma_{fu} r_f}{2\tau}$$

式中，$r_f$ 表示纤维半径。

对于**塑性纤维增强脆性基体**的情形，当纤维的拉伸破坏应变 $\varepsilon_{fu}$ 比基体的拉伸破坏应变 $\varepsilon_{mu}$ 高时，基体通常会发生多级破坏。基体发生多级破坏的条件为

$$(\sigma_f)_{\varepsilon_{mmax}} V_f - \sigma_{mu}(1 - V_f) < \sigma_{fu} V_f$$

式中，$(\sigma_f)_{\varepsilon_{mmax}}$ 为基体的应变达到 $\varepsilon_{mmax}$ 时纤维的应力。如果纤维不能再承受由基体破坏而增加的荷载，则当纤维断裂时，复合材料的单级破坏(single fracture)就发生。

两条相邻基体裂纹的间距可以再由简单的力平衡来确定，间隔距离是在 $x'$～$2x'$ 之间，其结果为

$$x' = \frac{1 - V_f}{V_f} \times \frac{\sigma_{mu} r_f}{2\tau}$$

在推导上式时，必须注意，垂直于纤维方向的每单位面积的纤维数目由 $V_f/\pi r_f^2$ 给出。

上述分析是以各纤维具有相同强度并在同一纵向位置同时断裂等为前提的。但实际情况是：①纤维的强度就不是常数，而是具有较大的分散性，纤维越长强度越小，单根纤维的强度与纤维束的强度也不相同，同时，各纤维也不可能在同一纵向位置上断裂；②纤维与基体复合后，会改变它们原有的强度性能，即不再由图 4.1(b)中的 $OF$，$OM$ 两直线所表征；③纤维与基体是粘牢的，即使某一纤维断裂，也只影响局部应力分布；④实验表明往往是基体先出现龟裂。这些因素将在后面的统计理论中考虑。

工程应用上通常是采用简化的半经验方法。如将式(4.5)的第二项忽略，则复合材料纵向拉伸强度可用下列简单公式表示

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu} V_f \tag{4.9}$$

式中的纤维强度 $\sigma_{fu}$，不是直接从纤维的拉伸实验得到，而是由宏观实验测出复合材料的纵向拉伸强度 $\sigma_{cu}$，再由上式反算出 $\sigma_{fu}$ 作为该种纤维的强度。

Tsai 和 Hahn(1980)给出的典型纤维的性能见表 4.1 所示。此表中的数据，大体上是根据长为 25 mm 的纤维测出的平均值。注意，在给出复合材料各层次的数据时，应与理论相匹配并说明前提条件。

**表 4.1　典型纤维的性能**

| 纤维 | 直径/μm | 密度/(g/cm³) | 模量 $E_f$/GPa | 强度 $\sigma_{fu}$/GPa |
|---|---|---|---|---|
| 碳纤维(T300，AS) | 7 | 1.75 | 230 | 2.80 |
| 硼纤维(4 密耳) | 100 | 2.60 | 410 | 3.45 |
| 玻璃纤维(E 型) | 16 | 2.60 | 72 | 3.45 |
| 芳纶(Kevlar 49) | 12 | 1.44 | 120 | 3.62 |

## 4.2 链式统计模型

### 4.2.1 Gucer 和 Guland 统计模型

通常，在复合材料中使用的高强度、高刚度纤维是脆性的，其强度具有明显的**离散性**，而且服从某种**极值分布理论**。实验结果表明，复合材料的拉伸强度（尤其是纵向拉伸强度）也具有明显的离散性，其破坏是一种极为复杂的随机过程，因此，处理此类问题宜采用**细观统计力学**。

Gucer 和 Gurland(1962)最早提出所谓**链式模型**以便处理某种材料集合体由于分散的、无关的内部断裂而导致的最后破坏。此模型设想把材料分成一系列长为 1 个单位的、完全相同的层。每一层含有 $N$ 个无关的、具有相同强度分布的、平行排列的元素。如果把每一层称为一个环，这些环就连成了一条链，链中只要有一环断了，整个链条就断了（所谓**最弱环**统计模型）。而每一环为一个元素束，它具有第三章 3.3 节所说的束强度分布（式(3.27)中的 $L=1$）。这样，就把纤维束统计模型和最弱环统计模型结合起来了。

对于处理像纤维复合材料这一类材料集合体的**累积型断裂**，Gucer 和 Guland 的模型无疑是在认识上进了一大步。它的缺点是完全不顾及元素间上下和左右的相互联系，很含糊地把每层的长度取为“1 个单位”。

Rosen (1964)把这一模型应用于单向纤维增强复合材料的纵向拉伸破坏问题的分析中，提出了**无效长度**的概念，用它作为每一层的长度。其理论根据是，在复合材料中，由于基体的存在，某根纤维在最弱点断裂时并非整根报废，在离开断口很短的一段距离后，这根纤维又基本上恢复到未断纤维的承载力水平。这段距离的大小取决于材料的性质。Rosen 定义纤维应力从零（断口）恢复到未断纤维承载力的某一规定百分数 $\phi$（也称为**纤维效率**）所需之距离 $\delta$ 为无效长度。下面首先给出关于无效长度的计算。

### 4.2.2 无效长度的计算

根据前述关于无效长度的定义，要确定无效长度 $\delta$，则必须求出断裂纤维的应力分布 $\sigma_f(x)$。Rosen 采用图 4.2 所示的剪滞分析模型。

此模型是从复合材料中提取的同心复合圆柱体，其半径是 $r_c$；圆柱体中心含一根长为 $2l$ 的纤维，其半径为 $r_f$，轴向弹性模量是 $E_f$。包围此根纤维的基体层厚度是 $(r_m-r_f)$，基体的切变模量是 $G_m$。基体层的最外层被看成是复合材料，其厚度是 $(r_c-r_m)$，纵向弹性模量是 $E_c$。$\bar{\sigma}_c$ 是远离纤维断口的复合材料承受的平均应力。

设模型中的基体仅受剪切力，纤维受纵向拉力和周围基体传递的剪切力，纤维的端面不受拉力（相当于断口）。由于断口的出现，使得周围复合材料的应力 $\sigma_c^*$ 有

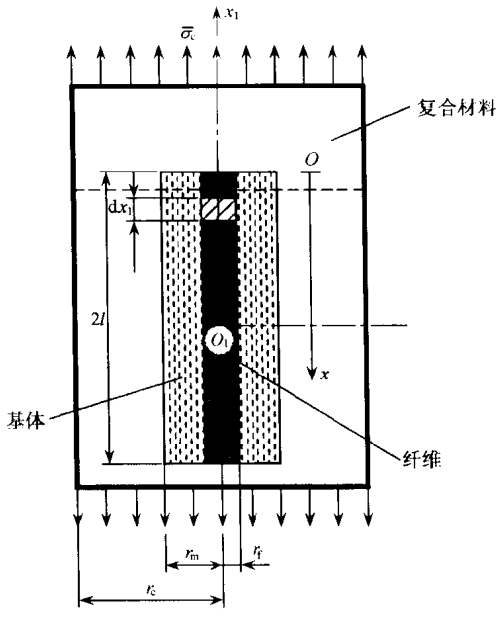



图 4.2　确定无效长度的剪滞分析模型

所增大。如图 4.2 所示的 $x_1O_1$ 坐标系统，若 $\sigma_f^*(x_1)$是纤维的轴向应力，则由 $dx_1$ 段纤维的平衡条件得到

$$2\pi r_f \tau_m^* + \pi r_f^2 \frac{d\sigma_f^*}{dx_1} = 0 \tag{4.10}$$

式中，$\tau_m^*$ 是基体传递给纤维的切应力。

另外，由图中虚线以上部分的平衡条件，有

$$\pi r_f^2 \sigma_f^* + \pi (r_c^2 - r_m^2)\sigma_c' = \pi r_c^2 \bar{\sigma}_c \tag{4.11}$$

基体内的切应变

$$\gamma_m = \frac{u_c^* - u_f^*}{r_m - r_f} \tag{4.12}$$

式中，$u_c^*$ 和 $u_f^*$ 分别为同心复合圆柱体的复合材料层和纤维的轴向位移。微分式(4.12)两次，并利用胡克定律

$$\gamma_m = \frac{\tau_m^*}{G_m}, \quad \frac{du_c^*}{dx_1} = \frac{\sigma_c^*}{E_c}, \quad \frac{du_f^*}{dx_1} = \frac{\sigma_f^*}{E_f} \tag{4.13}$$

得到

$$\frac{r_m - r_f}{G_m} \times \frac{d^2\tau_m^*}{dx_1^2} = \frac{1}{E_c} \times \frac{d\sigma_c^*}{dx_1} - \frac{1}{E_f} \times \frac{d\sigma_f^*}{dx_1} \tag{4.14}$$

微分式(4.11)一次，有

$$r_f^2 \frac{d\sigma_f^*}{dx_1} + (r_c^2 - r_m^2)\frac{d\sigma_c^*}{dx_1} = 0 \tag{4.15}$$

从式(4.10)、式(4.14)和式(4.15)中消去 $\mathrm{d}\sigma_f^*/\mathrm{d}x_1$ 和 $\mathrm{d}\sigma_c^*/\mathrm{d}x_1$，得

$$\frac{\mathrm{d}^2\tau_m^*}{\mathrm{d}x_1^2} - \eta^2(\tau_m^*)^2 = 0 \tag{4.16}$$

式中

$$\eta^2 = \frac{2G_m}{E_f(r_m - r_f)r_f}\left[1 + \frac{E_f}{E_c}\left(\frac{r_f^2}{r_c^2 - r_m^2}\right)\right] \tag{4.17}$$

常微分方程式(4.16)的通解是

$$\tau_m^* = A\sinh\eta x_1 + B\cosh\eta x_1 \tag{4.18}$$

由边界条件

$$\tau_m^*\big|_{x_1=0} = 0 \quad \left(\text{同时}\frac{\mathrm{d}\sigma_f^*}{\mathrm{d}x_1}\bigg|_{x_1=0} = 0\right)$$

可以定出 $B=0$。另外由边界条件 $\sigma_f^*|_{x_1=l}=0$ 可定出 $A$。具体作法是微分式(4.12)一次，并利用胡克定律式(4.13)及式(4.11)得到

$$r_f^2\sigma_f^* + (r_c^2 - r_m^2)E_c\left(\frac{r_m - r_f}{G_m}\frac{\mathrm{d}\tau_m^*}{\mathrm{d}x_1} + \frac{\sigma_f^*}{E_f}\right) = r_c^2\bar{\sigma}_c \tag{4.19}$$

代入边界条件 $\sigma_f^*|_{x_1=l}=0$，并利用 $\tau_m^*=A\sinh\eta x_1$，即得

$$A = -\frac{G_m r_c^2\bar{\sigma}_c}{\eta E_c(r_m - r_f)(r_c^2 - r_m^2)\cosh\eta l} \tag{4.20}$$

于是

$$\tau_m^* = -\frac{G_m r_c^2\bar{\sigma}_c}{\eta E_c(r_m - r_f)(r_c^2 - r_m^2)} \times \frac{\sinh\eta x_1}{\cosh\eta l} \tag{4.21}$$

将上式代入式(4.10)，并积分，再利用 $\sigma_f^*|_{x_1=l}=0$ 和式(4.17)，最后得

$$\sigma_f^* = -\frac{E_f r_c^2\bar{\sigma}_c}{E_c(r_c^2 - r_m^2) + E_f r_f^2} \times \left(\frac{\cosh\eta x_1}{\cosh\eta l} - 1\right) \tag{4.22}$$

通常，$r_c \gg r_f$，$r_c \gg r_m$，于是

$$\eta^2 = \frac{2G_m}{E_f(r_m - r_f)r_f} \tag{4.23}$$

及

$$\tau_m^* = -\bar{\sigma}_c\frac{G_m}{\eta E_c(r_m - r_f)} \times \frac{\sinh\eta x_1}{\cosh\eta l} \tag{4.24}$$

$$\sigma_f^* = -\bar{\sigma}_c\frac{E_f}{E_c}\left(\frac{\cosh\eta x_1}{\cosh\eta l} - 1\right) \tag{4.25}$$

如果作坐标变换 $x_1=l-x$(见图 4.2)，则式(4.24)和式(4.25)变成

$$\tau_m = -\bar{\sigma}_c\frac{G_m}{\eta E_c(r_m - r_f)} \times \frac{\sinh\eta(l - x)}{\cosh\eta l} \tag{4.26}$$

$$\sigma_f = -\bar{\sigma}_c\frac{E_f}{E_c}\left(\frac{\cosh\eta(l - x)}{\cosh\eta l} - 1\right) \tag{4.27}$$

当 $l\to\infty$ 时，可得

$$\sigma_f(l)=\sigma_f^*(0)=-\frac{E_f}{E_c}\bar{\sigma}_c\approx\bar{\sigma}_f \tag{4.28}$$

式中，$\bar{\sigma}_f$ 为远场纤维应力。

离开纤维端部（相当于断口部位）的距离为 $\delta$ 处的纤维拉应力为

$$\sigma_f=-\bar{\sigma}_c\frac{E_f}{E_c}\left(\frac{\cosh\eta(l-\delta)}{\cosh\eta l}-1\right) \tag{4.29}$$

若按 Rosen 的无效长度定义，纤维效率

$$\begin{aligned}\phi&=\left.\frac{\sigma_f(\delta)}{\sigma_f(l)}\right|_{l=\infty}=(1-\cosh\eta\delta+\tanh\eta l\cdot\sinh\eta\delta)|_{l=\infty}\\&=1-\cosh\eta\delta+(\cosh^2\eta\delta-1)^{1/2}\end{aligned} \tag{4.30}$$

由此，有

$$\cosh\eta\delta=\frac{1+(1-\phi)^2}{2(1-\phi)} \tag{4.31}$$

根据式(4.23)，最后求得

$$\frac{\delta}{d_f}=\frac{1}{2}\left[(V_f^{-\frac{1}{2}}-1)\frac{E_f}{2G_m}\right]^{\frac{1}{2}}\cosh^{-1}\left[\frac{1+(1-\phi)^2}{2(1-\phi)}\right] \tag{4.32}$$

式中，$d_f$ 和 $V_f$ 分别为纤维直径和纤维体积分数；$\phi$ 可取为 0.9。

此外，还可以用一种阶梯分布来确定无效长度，其结果为

$$\frac{\delta}{d_f}=\left[(V_f^{-\frac{1}{2}}-1)\frac{E_f}{2G_m}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.33}$$

### 4.2.3 Gucer-Guland-Rosen 统计模型

前面已提到，Rosen (1964) 把 Gucer 和 Guland 模型应用于单向纤维增强复合材料的纵向拉伸破坏问题的分析中。此模型将长为 $L$ 的复合材料视为 $n$ 节链条，见图 4.3，每一节链由 $N$ 根长为 $\delta$ 的纤维束组成，称为一 $\delta$ 层。考虑这些链节具有某种统计强度分布（等效于沿纤维的统计缺陷分布），纤维强度与链节强度之间的关系可参见式(3.13)。很明显，如果纤维强度分布 $P_f(\sigma_f)$ 的实验数据已知，那么，就能得到链节的概率密度函数 $p_\delta(\sigma_\delta)$。设纤维强度服从韦布尔分布，则链节的强度分布函数为

$$p_\delta(\sigma_\delta)=\delta\sigma_0^{-\beta}\beta\sigma_f^{\beta-1}\exp\left[-\delta\left(\frac{\sigma_\delta}{\sigma_0}\right)^\beta\right] \tag{4.34}$$

若链节中含有很多纤维，则纤维束强度分布 $p_b(\sigma_b)$ 和平均束强度 $\bar{\sigma}_b$ 分别由式(3.22)和式(3.23)给出。

设基体仅承受剪切，不承受拉力，如诸纤维在同一 $\delta$ 层断裂，该节链即告毁。只要其中最弱一节链破坏，便意味着复合材料的破坏。因此，**最弱环定理**可再次用来定义复合材料的破坏。

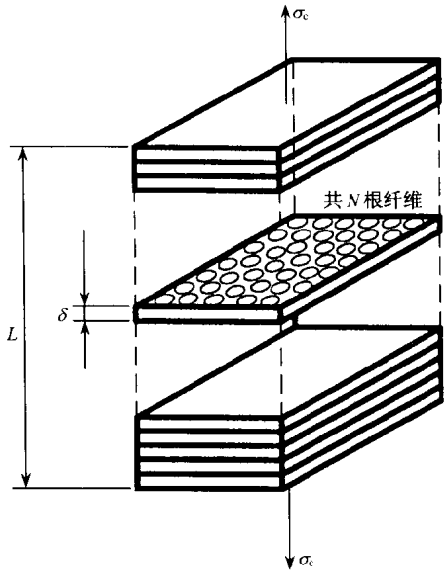



图 4.3 Gucer-Guland-Rosen 链式统计模型($L=n\delta$)

尽管无效长度本身的定义只是对真实情况的一种近似,但它使链式模型中环的长度有了较明确的物理意义,即:①当某纤维发生断裂时,它仅在含有断点的层内无效,而在其他层内,它还是完全有效的。②各层之间纤维的断裂不发生相互影响,只有发生在同一层内的纤维断裂才影响本层强度。当然,因为在某一层内纤维的断裂仍可能发生在不同位置,所以以上解释是不够严格的。

对于由 $n$ 节链条串成的复合材料,根据最弱环定理可求得至少有一环断裂的概率(即复合材料的强度累积分布函数)为

$$P_c(\sigma_c) = 1 - [1 - P_b(\sigma_c)]^n \tag{4.35}$$

由此可求得复合材料破坏时关于平均纤维应力 $\sigma_c$ 的概率密度函数 $p_c(\sigma_c)$ 为

$$p_c(\sigma_c) = np_b(\sigma_c)[1 - P_b(\sigma_c)]^{n-1} \tag{4.36}$$

式中

$$P_b(\sigma_c) = \int_0^{\sigma_c} p_b(\sigma)\mathrm{d}\sigma \tag{4.37}$$

上述的 $p_c(\sigma_c)$,$p_b(\sigma_b)$,$p_f(\sigma_f)$ 和 $p_\delta(\sigma_\delta)$ 分别表示复合材料、纤维束、纤维和链节的强度密度函数;$\sigma_c$,$\sigma_b$,$\sigma_f$ 和 $\sigma_\delta$ 则分别表示复合材料、纤维束、纤维和链节的应力。

复合材料强度的**众数**(最可能的复合材料破坏应力)$\sigma_c^*$ 由下式确定

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma_c}[p_c(\sigma_c)]_{\sigma_c=\sigma_c^*} = 0 \tag{4.38}$$

将式(4.36)代入上式得

$$\sigma_c^* = \bar{\sigma}_b - s_b(2\log n)^{1/2} + s_b \frac{\log\log n + \log 4\pi}{2(2\log n)^{1/2}} \tag{4.39}$$

从式(3.25)和式(4.39)可以看到，当 $N\to\infty$ 时，$s_b\to 0$，$\sigma_c^*\to\bar{\sigma}_b$，即

$$\sigma_c^* = \sigma_0(\delta\beta e)^{-1/\beta} \tag{4.40}$$

复合材料的强度趋向于很短的纤维束强度。换句话说，任意一块长度大于无效长度的由足够多根纤维构成的单向复合材料，其统计强度与其长度无关。

当考虑纤维体积含量时，复合材料的拉伸强度由 $V_f\sigma_c^*$ 给出。很明显，当纤维无效长度及纤维强度离散度减小时，复合材料强度增加。

Rosen(1964)用直径较粗的 E-玻璃纤维和环氧树脂做成 2 组二维单向增强试件，拉伸试验结果虽然在总的变化趋势上与理论相符，但强度试验值比理论值低得多。Rosen 的理论与试验之间的差别主要来自下列 3 个方面。

1. 纤维强度韦布尔分布外推到很短长度范围内的有效性

无效长度一般很小，按式(4.32)或式(4.33)计算的值大约为 10～100 倍纤维直径，对常用纤维是 0.1～10 mm 左右。长度在 1 mm 左右以上的纤维强度实验表明，强度较好地服从韦布尔分布。至于长度在 1 mm 以下的纤维强度，鉴于实验技术和水平的限制，很难做出较精确的测定。

2. 无效长度的计算

式(4.32)或式(4.33)都是根据弹性分析的结果。事实上，在不连续纤维的端部的基体或界面往往都有不同程度的损害，特别在较高的体积分数下，弹性分析的结果未必能应用。如果考虑基体屈服或界面剥离，无效长度显然要大得多。另外，无效长度的计算中没有考虑纤维断裂之间的相互影响，当体积分数增加时，近似程度将较差。

3. 链环模型的适用性

如前所述，在纤维断裂后，断口附近的基体或界面将受到损害，对于弱的基体或界面，可能表现为沿纤维方向的纵向劈裂。随着累积断裂数的增加，这一趋势将更加明显，劈裂的范围可能会很大。这时，讨论材料是否由于某一最弱层的断裂而破坏已无意义，直接利用纤维束模型可能合适得多。如果界面强度和基体强度都足够高，那么，另外一个可能上升为影响断裂过程的主要因素是断口附近的**局部应力集中**。邻近纤维在断口平面两边的一个过载区内断裂概率的增加使得所有纤维的断裂互相无关的假定发生问题。平均荷载分担法则不再适用，断纤维的荷载主要由断口附近的纤维承担，对较远的纤维基本没有影响。这种荷载分配被称为**局部荷载分担法则**，采用局部荷载分担法则和考虑纤维断裂的相关性后来发展为**裂纹扩展统计理论**。

对于延性基体，在纤维断口附近发生小范围基体屈服或界面剥离的情况，断口邻近纤维的应力集中将大大减小。另外，纤维体积分数较小时的剪滞分析所能给出的应力集中值偏高。三维试件的应力集中在弹性情况下就不大，如再考虑到以上因

素就更小了。鉴于纤维强度的随机性质，在这些情况下，是否值得考虑应力集中所引起的断裂相关性还是个问题。可以预料，此时只要能正确选取无效长度，**Gucer-Guland-Rosen 统计模型**(见图 4.3)能给出较好的结果。

Rosen (1970) 将复合材料强度(式(4.40))与长为 $L$ 的纤维平均强度(式(3.16))的测试结果作了比较，发现了一些有趣的结论。图 4.4 示出了 $L/\delta$ 为 1、10、100 及 1 000 时的 $\sigma_c^*/\bar{\sigma}_f$-$\beta$ 的变化曲线。从图中可见，当 $L=\delta$ 时，复合材料的强度略小于平均纤维强度；当 $L>\delta$ 时，复合材料的强度则大于长 $L>7\delta$ 的纤维束的平均纤维强度。另外，对于某种纤维的强度变异系数小于 15%(或形状参数 $\beta>8$)的情形，复合材料的强度接近平均纤维强度。

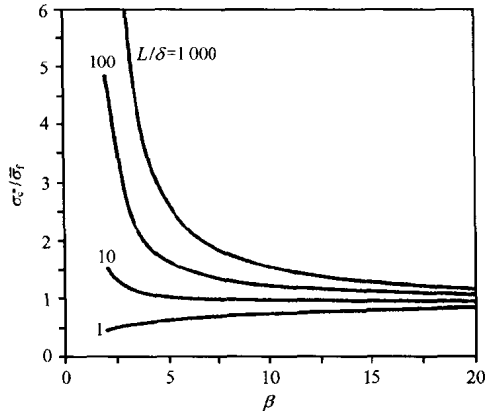



图 4.4 $L/\delta$ 为 1、10、100 及 1 000 时的 $\sigma_c^*/\bar{\sigma}_f$-$\beta$ 的变化曲线

## 4.3 裂纹扩展模型

从纤维束过渡到复合材料，需考虑**基体及界面的黏结作用**。由于组分性质、界面结合、纤维含量和几何排列等的差别，其破坏过程也各不相同。因为纤维、基体或界相中都可能有薄弱环节，复合材料的强度表现与纤维或基体单独使用时的差别很大。随着荷载的增长，薄弱环节首先出现破坏源。其破坏过程将随机扩大；同时，破坏源的个数也随机增多；直至最后破坏。值得注意的是，在复合材料中，一些纤维断裂后，损伤进一步增长的模式取决于**基体和界面的性能**。

如果基体是脆性的而界面结合良好，则纤维断裂产生的拉应力集中可使裂纹穿过基体引起邻近纤维的断裂，直至某个薄弱截面失去承载能力而导致整个材料破坏；若界面较弱，则纤维逐步断裂产生的切应力集中可使纤维/基体界面发生剪切破坏，导致部分纤维从基体中拔出；在一般情况下，复合材料不同横截面上的裂纹可使邻近纤维发生逐步断裂和基体或界面的剪切破坏。因此，单向复合材料受纵向拉伸荷载作用时，至少存在 3 种可能的破坏模式：

1）脆性断裂(断口平整)。

2）有纤维拔出的基体脆性断裂(断口不平整)。

3）不仅有纤维拔出，而且还带有较大范围的界面和(或)基体的剪切破坏(类似于纤维束)。

复合材料的破坏模式还与纤维含量有关：含量低($V_f<40\%$)的，主要呈现脆性断裂；中等含量($0.4<V_f<0.65$)的，表现为纤维拔出的脆断；含量高或浸胶性能不好的，多为第3种形式破坏。

Daniels早期提出的纤维束统计理论及Gucer-Guland-Rosen统计模型，采用了平均荷载分担法则，这对单向纤维增强复合材料并不合适。Zweben根据单向复合材料拉伸破坏的特点，首次提出了以链式模型为基础的**裂纹扩展统计理论**，其后是Argon。在他们的统计理论中，有两个关键性的假设是：①无效长度为常数，约为5～10倍纤维直径。②若计及应力集中，也只限于已断纤维紧邻的一小簇纤维上。Harlow和Phoenix等率先用数学理论详细研究了单向复合材料的拉伸破坏过程。其后，Smith等导出了复合材料破坏概率的近似表达式(从数学上说是比较精确的)。

上述统计分析有两个主要特征，①把复杂的破坏过程限制在某一$\delta$层内。当纤维逐步断裂的根数达到某一临界值时，邻近纤维的应力集中变得如此之大，致使复合材料发生灾难性的破坏。临界值一般在3～8之间，取决于给定的材料系统。②若纤维的强度服从韦布尔分布，则可由它导出复合材料的强度分布函数。

根据最弱环定理，由一节链(在基体中长为$\delta$的$N$根平行纤维)的破坏概率可导出复合材料的破坏概率，但要精确计算一链节的破坏概率是一件极为困难的事(因为$N$是个很大的数)。

### 4.3.1 Zweben模型

1964年Zweben在计算复合材料的破坏概率时，把长度为$L$的单向复合材料仍看成是$n=L/\delta$所串成的链条。若某一链节中的某根纤维在轴向拉伸荷载(用纤维平均应力$\sigma$表示)作用下发生断裂，则接下去可能是断口紧邻两侧的两根纤维由于应力集中作用同时发生断裂，或该两根纤维的任一根发生断裂，此后将依这种模式的断裂而扩展下去，直至整个链节破坏。

Zweben设想在纤维断裂的累积过程中，只要在某一层发生了$r$根以上纤维的相继断裂，复合材料便达到它的破坏极限。这里的$r$是一个确定的正整数，可作为临界裂纹尺寸的一种量度。如用$E_r(\sigma)$表示试样中发生$r$根以上纤维相继断裂这一事件(记为$A_r$)的期望数，则复合材料的断裂判据可以由下式表示

$$E_r(\sigma)=1 \tag{4.41}$$

至此将问题转化为如何计算发生$A_r$的概率。即使如此，当$r$增加时，也不是一件容易的事。

设长为 $\delta$ 的纤维的强度服从韦布尔分布，因此其破坏概率是

$$P_1(A_1) = F(\sigma) = 1 - \exp\left[-\delta\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^{\beta}\right] \tag{4.42}$$

在由链式模型表示的复合材料中，共有 $nN$ 个长为 $\delta$ 的纤维元素。在平均纤维应力水平 $\sigma$ 作用下，应有 $nNP_1(A_1)$ 个元素损坏，即孤立破坏的期望数(初始断裂数)是

$$E_1(\sigma) = nNP_1(A_1) = nNF(\sigma) \tag{4.43}$$

为了计算 2 根以上相继断裂的概率，还需要定出以下近似：

1) 略去这些初始断裂发生在试件边沿的概率，在 $N$ 很大时，只要边纤维与内部纤维的性能完全等同，这一概率确实相当小。

2) 纤维断裂引起的应力重新分布只局限在断口紧邻的纤维上，Hedgepeth 的二维分析表明，断口紧邻纤维以外的其他完整纤维所承担的最大应力很快跌到平均应力水平，但是，当初始断裂数增加时，这一情形不一定成立，为此，还需作出近似 3)。

3) 在同一 $\delta$ 层内，初始断裂数相距足够远，以至能略去它们互相连成 $r$ 根纤维连续断裂的可能性(二维情况要求至少隔 $2(2r-1)$ 根)，同时可以略去它们(及由它们引起的相继断裂)对其他初始断裂相邻元素的影响。对含有不同根数断纤维的断口，中间隔着不同根数未断纤维的情况所作的二维分析表明，当能满足前者时，后者也能近似满足。

Zweben(1968)，Zweben 和 Rosen(1970)分别就纤维平面排列和三维排列给出了 $r=1\sim4$ 时的 $P(A_r)$ 表达式。为了叙述的简单性，下面仅研究二维的情况，并把表达式扩展到 $r=5$。对于三维的情况，不过是形式上更加复杂一些。

设长为 $\delta$ 的某根纤维已发生了断裂，由于纤维孤立破坏，引起相邻两侧纤维的应力在 $\delta$ 层内平均增至 $\overline{K}_1\sigma$($\overline{K}_1$ 被称为应力放大因子)。此时，承受过应力的纤维的破坏概率则为$[F(\overline{K}_1\sigma)-F(\sigma)]$。严格地说，这一概率应为

$$\frac{F(\overline{K}_1\sigma) - F(\sigma)}{1 - F(\sigma)}$$

即在 $\sigma$ 下未断而仅因为应力集中而断裂的概率。其物理意义是：如果最弱元素的强度是 $\sigma$，则其余元素的强度一定比 $\sigma$ 高。考虑到 $F(\sigma)\ll1$，故取 $1-F(\sigma)\approx1$，以后的相继断裂与此类似。现在把各种可能的相继断裂路径归纳为图 4.5。

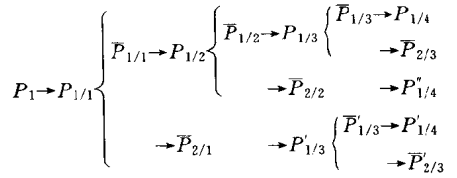



图 4.5　形成相继纤维断裂的可能路径

图中，$P_{1/j}$，$P'_{1/j}$，$P''_{1/j}$ 为发生 $j$ 根纤维相继断裂的两侧至少有一根纤维断裂之事件

及其概率；$\overline{P}_{1/j}$，$\overline{P}'_{1/j}$为发生 $j$ 根纤维相继断裂的两侧仅有一根纤维断裂之事件及其概率；$\overline{P}_{2/j}$，$\overline{P}'_{2/j}$为发生 $j$ 根纤维相继断裂的两侧的两根纤维同时断裂之事件及其概率。于是

$$\left.\begin{aligned}
P(A_1) &= P_1 \\
P(A_2) &= P_1 P_{1/1} \\
P(A_3) &= P_1(P_{1/2}\overline{P}_{1/1} + \overline{P}_{2/1}) \\
P(A_4) &= P_1(\overline{P}_{2/2}\overline{P}_{1/1} + P_{1/3}\overline{P}_{1/2}\overline{P}_{1/1} + P'_{1/3}\overline{P}_{2/1}) \\
P(A_5) &= P_1(P_{1/4}\overline{P}_{1/3}\overline{P}_{1/2}\overline{P}_{1/1} + \overline{P}_{2/3}\overline{P}_{1/2}\overline{P}_{1/1} \\
&\quad + P''_{1/4}\overline{P}_{2/2}\overline{P}_{1/1} + P'_{1/4}\overline{P}'_{1/3}\overline{P}_{2/1} + \overline{P}'_{2/3}\overline{P}_{2/1})
\end{aligned}\right\} \tag{4.44}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
P_{1/1} &= 1 - [1 - F(\overline{K}_1\sigma) + F(\sigma)]^2 \\
\overline{P}_{1/1} &= 2[F(\overline{K}_1\sigma) - F(\sigma)][1 - F(\overline{K}_1\sigma) + F(\sigma)] \\
\overline{P}_{2/1} &= [F(\overline{K}_1\sigma) - F(\sigma)]^2 \\
P_{2/1} &= 1 - [1 - F(\overline{K}_2\sigma) + F(\sigma)][1 - F(\overline{K}_2\sigma) + F(\overline{K}_1\sigma)] \\
\overline{P}_{1/2} &= [F(\overline{K}_2\sigma) - F(\overline{K}_1\sigma)][1 - F(\overline{K}_2\sigma) + F(\sigma)] \\
&\quad + [F(\overline{K}_2\sigma) - F(\sigma)][1 - F(\overline{K}_2\sigma) + F(\overline{K}_1\sigma)] \\
\overline{P}_{2/2} &= [F(\overline{K}_2\sigma) - F(\sigma)][F(\overline{K}_2\sigma) - F(\overline{K}_1\sigma)] \\
P_{1/3} &= 1 - [1 - F(\overline{K}_3\sigma) + F(\sigma)][1 - F(\overline{K}_3\sigma) + F(\overline{K}_2\sigma)] \\
P'_{1/3} &= 1 - [1 - F(\overline{K}_3\sigma) + F(\sigma)]^2 \\
\overline{P}_{1/3} &= [F(\overline{K}_3\sigma) - F(\overline{K}_2\sigma)][1 - F(\overline{K}_3\sigma) + F(\sigma)] \\
&\quad + [F(\overline{K}_3\sigma) - F(\sigma)][1 - F(\overline{K}_3\sigma) + F(\overline{K}_2\sigma)] \\
\overline{P}'_{1/3} &= 2[1 - F(\overline{K}_3\sigma) + F(\sigma)][F(\overline{K}_3\sigma) - F(\sigma)] \\
\overline{P}_{2/3} &= [F(\overline{K}_3\sigma) - F(\sigma)][F(\overline{K}_3\sigma) - F(\overline{K}_2\sigma)] \\
\overline{P}'_{2/3} &= [F(\overline{K}_3\sigma) - F(\sigma)]^2 \\
P_{1/4} &= P''_{1/4} = 1 - [1 - F(\overline{K}_4\sigma) + F(\sigma)][1 - F(\overline{K}_4\sigma) + F(\overline{K}_3\sigma)] \\
P'_{1/4} &= 1 - [1 - F(\overline{K}_4\sigma) + F(\sigma)]^2
\end{aligned}\right\} \tag{4.45}$$

从而得

$$E_r(\sigma) = nNP(A_r) \tag{4.46}$$

当 $r>5$ 时，表达式将变得更加复杂。不过，我们得先回过头来分析一下判据本身。$E_r(\sigma)=1$ 看起来是一种根据裂纹扩展判断破坏的准则，其实并不尽然。首先，$r$ 是一个需要确定的量，其大小与复合材料或纤维强度的离散性、基体性质、界面黏结强度及试样尺寸等因素有关。Zweben 并没有给出确定它的方法，只是凭经验和为安全起见，让它等于 2，或让它符合已有的实验数据。其次，随着 $r$ 的增加，累积断裂数也必然增加，所以 $E_r(\sigma)=1$ 也可视为累积削弱程度的一种衡量。如不给

予 $r$ 以明确的意义，就不能说试件一定是在 $E_r(\sigma)=1$ 时由于裂纹扩展而断裂。因此，要想模拟真实材料由于裂纹扩展而引起的破坏，就应使 $r$ 具有临界裂纹尺度的意义，即应附加裂纹失稳扩展条件。

另一问题是如何考虑纤维断口附近的应力集中效应？当某处的 $i$ 根纤维发生相继断裂时，通常假定应力扰动的效果可用断口紧邻的两根纤维的应力在 $\delta$ 层内“平均”增至 $\overline{K}_i\sigma$ 来近似。实际上，断口邻近纤维的应力集中或应力 $\sigma_i(x)$ 沿纤维长度是变化的，即从最大值（$x=0$ 处）开始连续衰减至 $\sigma$。Zweben 简单地取 $\overline{K}_i=K_i$（$K_i$ 为 $x=0$ 处的最大应力集中因子），显然夸大了断口邻近纤维的破坏概率。因此，Zweben 所求得的结果低于实验值。

Argon(1974)提出一个较合理的折算法，即在 $\delta$ 层内按非均匀应力分布算得的断裂概率和按平均升高到 $\overline{K}_i\sigma$ 的断裂概率相等来确定 $\overline{K}_i$。按照这一方法，假定纤维的强度为韦布尔分布，可得

$$\overline{K}_i=\left\{\frac{2}{\delta\sigma^{\beta}}\int_0^{\delta/2}[\sigma_i(x)]^{\beta}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{\beta}} \tag{4.47}$$

与 Argon 的观点类似，Wolstenhome 和 Smith(1989)指出，断口邻近纤维的应力分布可用指数衰减函数 $1+a\exp(-cx)$ 表示，其中 $a$ 和 $c$ 是待定常数。同理有

$$\overline{K}_i=\left\{\frac{2}{\delta}\int_0^{\delta/2}[1+a\exp(-cx)]^{\beta}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{\beta}} \tag{4.48}$$

采用应力放大因子虽然较合理。但计算繁难不便应用。在大多数统计理论中仍粗略地用 $K_i$ 代替 $\overline{K}_i$，因为尚有许多因素还未能顾及，局部处理要求过严也不必要。

### 4.3.2 Argon 模型

Scop 和 Argon(1969)，Argon(1974)用计算机研究了 $N$ 根（约 50）平行纤维构成的板条在拉伸荷载作用下的断裂过程。他们认为，裂纹稳定扩展的主要模式是由某一孤立断裂开始，由于断口相邻纤维的应力集中，即使施加荷载不再增加，断口紧邻的纤维也可能发生破坏。为简单起见，假定裂纹扩展模式为断口两侧纤维同时发生断裂的对称扩展，当按这种方式构成一条具有临界尺寸 $r$（奇数）的裂纹时，试件或链节就会由于它的失稳扩展而发生破坏。

基于链式模型，设长为 $\delta$ 的某一链节中的某根较弱纤维的破坏概率是

$$P(A_0)=F(\sigma) \tag{4.49a}$$

其中，$F(\sigma)$ 为韦布尔分布函数。当第一破坏发生后，设断口紧邻的两根纤维的应力在 $\delta$ 层内“平均”增至 $\overline{K}_1\sigma$。此时，承受过应力的纤维在 $\sigma\to\overline{K}_1\sigma$ 之间发生断裂的概率是

$$P(A_1)=F(\overline{K}_1\sigma)-F(\sigma) \tag{4.49b}$$

同理，当有 $(r-1)$ 根纤维发生相继断裂时，断口紧邻的纤维在 $\sigma\to\overline{K}_r\sigma$ 之间发生断裂的概率是

$$P(A_r) = F(\bar{K}_r\sigma) - F(\sigma) \tag{4.49c}$$

因为假设裂纹对称扩展，即纤维在断口两侧对称断裂，所以每扩展一次，共有两根纤维同时断裂。这样，第一根纤维在应力 $\sigma$ 下断裂后，相继有 $(r-1)$ 根纤维在应力 $\sigma$ 下断裂而形成 $r$ 根纤维断裂的概率是

$$P(A_0)P^2(A_1)P^2(A_3)\cdots P^2(A_r), \quad r = 1,3,5,\cdots$$

当断裂纤维达到 $r$ 根时，其余 $(N-r)$ 根纤维在 $\sigma$ 和大于 $\bar{K}_r\sigma$ 的应力之间同时或迅速断裂的概率是

$$[1 - P(A_0)]^{N-r}$$

上述两个事件必须同时发生，才可能在 $r$ 根纤维逐步断裂后裂纹发生失稳扩展，从而导致链节的破坏。由此可得某一 $\delta$ 层的强度分布

$$G(\sigma) = NP(A_0)P^2(A_1)P^2(A_3)\cdots P^2(A_r)[1 - P(A_0)]^{N-r} \tag{4.50}$$

显然，当裂纹发生失稳扩展时，$P(A_r)$ 应该接近于 1。从上述推导可以看到，式(4.50)忽略了同一层内其他的孤立断裂，认为累积断裂完全是应力集中的结果。同时在裂纹扩展概率计算中略去了断口两侧只有一根纤维断裂的可能性，从式(4.45)可知，这种可能性实际上比断口两侧纤维同时断裂的可能性还大。

整个试件的破坏由链式模型确定，其强度分布是

$$H(\sigma) = 1 - [1 - G(\sigma)]^n \tag{4.51}$$

概率密度函数是

$$h(\sigma) = \frac{\mathrm{d}h(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma} \tag{4.52}$$

式(4.51)和式(4.52)中含有待定参数 $\sigma$ 和 $r$。使概率密度 $h(\sigma)$ 取最大值的 $\sigma$ 和 $r$，就是复合材料的统计强度和纤维临界断裂数(临界裂纹长度)。所以有下列方程

$$\frac{\partial h(\sigma,r)}{\partial\sigma} = 0, \quad \frac{\partial h(\sigma,r)}{\partial r} = 0 \tag{4.53}$$

显然，上述方程的求解是相当困难的，特别是参数 $r$ 在 $H(\sigma)$ 中不完全是显含的，它还包括在应力集中因子 $\bar{K}_r$ 中。为了求出复合材料的统计强度，Argon 给出断裂准则

$$H(\sigma) = H_0, \quad F(\bar{K}_r\sigma) = Q_0 \tag{4.54}$$

式中：$H_0$ 和 $Q_0$ 是给定的常数(例如 $H_0=0.5$，$Q_0=0.99$)。由此可求得临界裂纹长度和破坏应力。

Argon 的贡献之一在于他首先从统计意义上提出了裂纹失稳扩展的条件。但是 $H_0=0.5$ 和 $Q_0=0.99$ 这两个数多少有些凭经验出发，在实际计算中。考虑到 Argon 采用的应力放大因子(式(4.48))比 Hedgepeth 的剪滞分析结果要大，故式(4.54)可能适用于对应力集中较敏感的材料。

对比之下，Zweben 未能给出试件强度分布表达式。如以式(4.41)作为破坏判

据，相当于给出了由一根纤维的孤立断裂而导致形成临界裂纹的概率

$$P(A_r) = \frac{1}{nN}$$

于是，试件中至少含有一条长为 $r$ 的临界裂纹，即试件破坏的概率为

$$H(\sigma) = 1 - [1 - P(A_r)]^{nN} = 1 - \left(1 - \frac{1}{nN}\right)^{nN} \xrightarrow[nN \to \infty]{} 1 - e^{-1}$$

也就是说，当 $nN$ 很大时，式(4.51)暗含了整体破坏的概率为 0.63 左右。由于它是以出现一条临界裂纹为标志，所以具有较明确的物理意义。

### 4.3.3 Harlow 和 Phoenix 理论

Harlow 和 Phoenix(1978)根据一种简化的局部荷载分担法则，精确地分析了根数 $N=4\sim9$、呈环状排列(本质上仍是二维问题，但无所谓边缘断裂)的纤维束，在荷载水平 $\sigma$(纤维平均应力)作用下发生断裂的所有途径。并由此计算链式模型中某一链节的破坏概率。他们所采用的简化局部荷载分担法则是将已断纤维卸下的荷载平均分配到与它或者它所在的断裂团相邻的两侧纤维元素上，其表达式为

$$K_r = 1 + \frac{r}{2}, \quad r = 0,1,2,3,\cdots \tag{4.55}$$

式中：$r$ 是连续断裂纤维数；$K_r$ 是断口紧邻完整纤维的应力集中因子。同时认为断裂纤维在 $\delta$ 长度内不能再承受应力。很明显，与 Hedgepeth 结果相比较，式(4.55)将给出较大的应力集中。虽然如此，局部荷载分担法则却能体现应力重分布的基本特征，具有简单实用的优点，对各种不同的纤维排列(二维或三维，正方形或六角形排列)均适用。

设长为 $\delta$(Harlow 和 Phoenix 认为把它称为“有效荷载长度”可能更好)的纤维元素破坏的累积分布函数为韦布尔分布

$$F(\sigma) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{\sigma_\delta}\right)^{\beta}\right], \quad \sigma \geqslant 0 \tag{4.56}$$

式中，$\sigma_\delta$ 是长为 $\delta$ 的纤维的韦布尔尺度参数。必须指出，若计及纤维强度的某些统计性质，则 $\sigma_\delta$ 可表示为

$$\sigma_\delta = \sigma_L(\delta/L)^{-1/\beta} \tag{4.57}$$

式中，$\sigma_L$ 为较长参考长度 $L$(指拉伸试验中的标距长度)的纤维的韦布尔尺度参数。通常，$\sigma_\delta$ 比 $\sigma_L$ 约大 1 倍。

Harlow 和 Phoenix 研究了一链节中纤维数目 $N$ 增加时的累积强度分布行为。他们把 $G_N(\sigma)$ 定义为含有 $N$ 根纤维的链节的破坏累积分布函数。通过考虑断裂纤维和存活纤维的所有构造和以这些构造可能继续发生破坏的所有方式，将这些方式的所有概率相加，就可以精确地求得 $G_N(\sigma)$ 的表达式。例如，当 $N=2$ 时，有

$$G_2(\sigma) = F^2(\sigma) + 2F(\sigma)[F(2\sigma) - F(\sigma)]$$

$$= 2F(\sigma)F(2\sigma) - F^2(\sigma) \tag{4.58}$$

式中，第一个等号右边的第一项表示两纤维元素在应力水平 $\sigma$ 下同时破坏的概率；第二项表示一根纤维破坏而另一根纤维承受过应力时共有两种断裂途径的概率。注意，此种情形下的应力集中因子 $K_1$ 是 2 而不是 3/2，因为链节中仅含有两根纤维。当 $N=4$ 时，通过繁冗的计算，可以获得

$$\begin{aligned} G_4(\sigma) = {} & 16F(4\sigma)F(2\sigma)F(3\sigma/2)F(\sigma) - 4F(4\sigma)F(2\sigma)F(4\sigma)F^2(4\sigma) \\ & - 4F(4\sigma)F^2(3\sigma/2)F(\sigma) + 4F(4\sigma)F^3(\sigma) - 8F^2(2\sigma)F(3\sigma/2)F(\sigma) \\ & + 2F^2(2\sigma)F^2(\sigma) - 8F(4\sigma)F(3\sigma/2)F^2(\sigma) \\ & + 4F^2(3\sigma/2)F^2(\sigma) - F^4(\sigma) \end{aligned} \tag{4.59}$$

随着 $N$ 的增加，计算变得越来越繁琐，当 $N>9$ 时，计算的繁琐程度即使使用计算机也变得不能容忍（即使使用目前的超级计算机，也仅能求得 $N\leqslant 14$ 的情形）。

Harlow 和 Phoenix 通过对 $N=4\sim9$ 的束强度分布的数值结果进行分析，发现纤维束的强度分布遵从“最弱环”的方式，即

$$G_N(\sigma) = 1 - [1 - W_N(\sigma)]^N \tag{4.60}$$

由上式可解得

$$W_N(\sigma) = 1 - [1 - G_N(\sigma)]^{1/N} \tag{4.61}$$

对于 $N=1\sim9$，$W_N(\sigma)$ 在韦布尔概率纸上的变化规律见图 4.6 所示（$\beta=5$，属于脆性纤维）。从图中可以看出，当 $N=1$ 时，$W_1(\sigma)$ 在韦布尔概率纸上为一根斜直线，随着 $N$ 的增加，$W_N(\sigma)$ 具有明显的收敛性，即

$$W_N(\sigma) \xrightarrow[N\to\infty]{} W(\sigma)$$

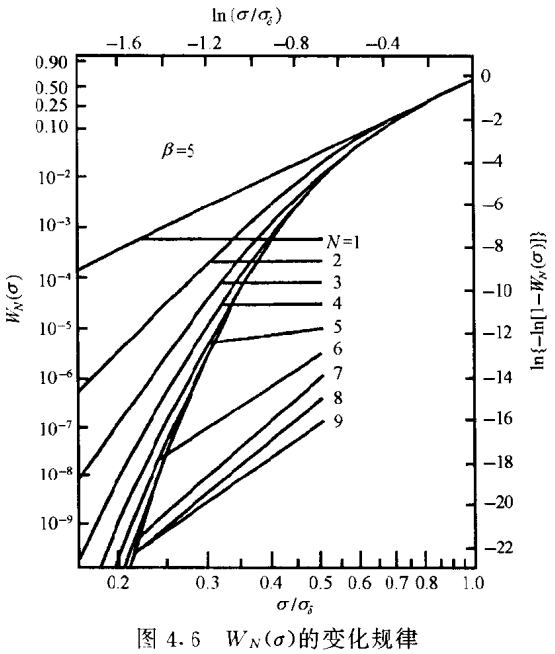



图 4.6　$W_N(\sigma)$的变化规律

其中，$W(\sigma)$被称为**破坏特征分布函数**。从收敛趋势看来，$W_9(\sigma)$已经接近极限。因此，当 $N>9$ 时，$W(\sigma)$可以用 $W_9(\sigma)$来近似。另外，收敛性随 $\sigma$ 的减小而缓慢增加，这样，当 $N=9$ 时，收敛性完全进入到 $W(\sigma)$的低值段($<10^{-10}$的概率)。1981 年 Harlow 和 Phoenix 在非常复杂的计算中，从马可夫循环矩阵的最大特征值出发，揭示了 $W(\sigma)$的分布特征。然而，关于 $W(\sigma)$如此重要的分布函数尚无简单的解析表达式。

$W(\sigma)$的重要性在于式(4.60)中纤维束破坏的分布函数可以由以下非常精确的近似式给出

$$G_N(\sigma) = 1 - [1 - W(\sigma)]^N \tag{4.62}$$

至于纤维束强度分布遵从最弱环方式的现象可以这样解释：对很大的一束纤维，大约每 10 根纤维的区域基本上是统计无关的(在局部荷载分担法则下，相隔 6～7根左右的纤维实际上已不存在互相影响，除非它们之间的纤维全部断裂)，一旦发生了 5～6 根左右的纤维相继断裂，虽然区域间的影响显著增加，但是系统也已濒临破坏的边缘。正是这种区域间的统计独立性，使得纤维束的破坏表现为最弱环的特征。

对于由链式模型代表的复合材料试样，其破坏累积分布函数是

$$H_{N,n}(\sigma) = 1 - [1 - G_N(\sigma)]^n \tag{4.63}$$

令 $V=Nn$，并将式(4.62)代入上式得

$$H_{N,n}(\sigma) = 1 - [1 - W(\sigma)]^V \tag{4.64}$$

由二项展开式有 $H_{N,n}(\sigma)\approx VW(\sigma)$。这样，如果 $V$ 很大，例如 $10^6$ 个元素，则 $W(\sigma)$就必须远小于 $10^{-6}$。

图 4.7 示出了 $\beta=3\sim50$ 时的 $W(\sigma)$的数值结果。可以利用图 4.7 并根据 $\ln[-\ln(1-H)]=\ln[-\ln(1-W)]+\ln V$的关系来构造一幅 $H_{N,n}(\sigma)$图。图 4.8 示出了 $V=10^{-6}$的转化结果，此图相当于图 4.6 中小于 $10^{-5}$的部分区域的一种显示，也是 $\beta=3\sim50$ 时较小的复合材料试样破坏的累积分布函数 $H_{N,n}(\sigma)$的标绘图。图 4.8 的几个特征值得讨论。

1) 图 4.8 中的各条曲线均近似是直线，这表明，复合材料的强度近似服从韦布尔分布。事实上，包含整个概率范围的实验图需要测试约 20 000 个试样，此外，采用标准的统计技术，蒙特卡罗模拟很可能不会导致拒绝韦布尔分布实际上是正确分布的假设。

2) 图 4.8 中各条近似直线的斜率随 $\beta$ 的改变而变化较小。既然斜率与韦布尔形状参数成正比，这就表明，当纤维的韦布尔形状参数从 50 急剧地减少到 3 时，复合材料的**有效**韦布尔形状参数则从 50 缓慢地减少到 20。另一方面，图中的水平定位受 $\beta$ 值的影响很大，这意味着纤维强度离散性的增加使复合材料强度大大减少。例如，当 $\beta$ 从 50 减至 3 时，复合材料的强度从 $0.75\sigma_\delta$ 减少到 $0.25\sigma_\delta$。这也表明，复合材料的强度远小于长为 $\delta$ 的纤维的强度，$\beta=7$ 时的典型情形，仅为 1/3 左

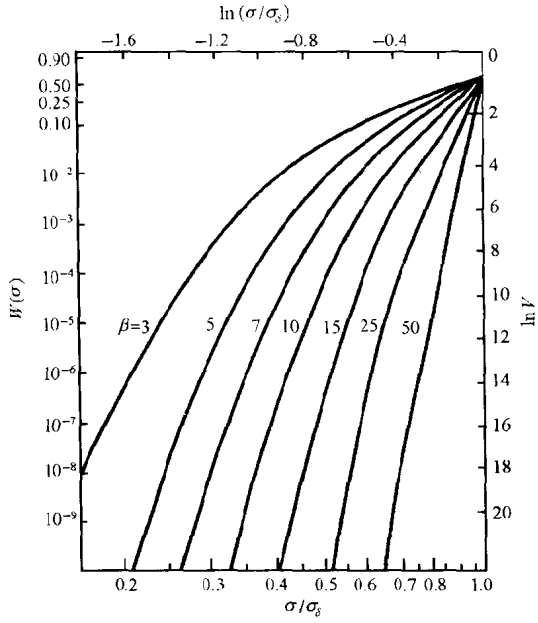



图 4.7　$W(\sigma)$的变化规律

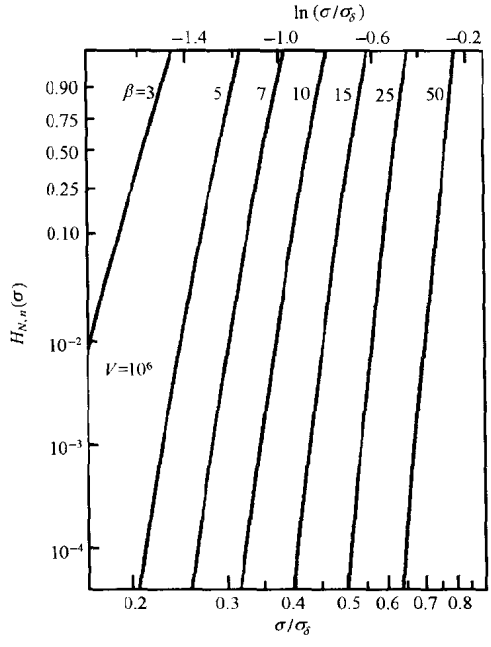



图 4.8　$H_{N,n}(\sigma)$的变化规律

右。此外，对纤维进行标准拉伸试验，所采用的标距长度 $L$ 比 $\delta$ 约大两个数量级，由式(4.57)可知，其强度约是 $\sigma_\delta$ 的 1/2。再者，正如通常所观察到的那样，从典型的实验室拉伸试验中，偶然会出现复合材料的强度接近于纤维强度的情形。

3）构造图 4.8 的方法表明，在复合材料的强度中具有轻微的尺寸效应，在复合材料的有效韦布尔形状参数中则具有轻微的改变。如果选择较大的体积 $V=10^9$，而不是 $V=10^6$，那么，依赖 $\beta$ 的复合材料的强度就可能略微有所降低，而有效的韦布尔形状参数也可能略微有所增大。

### 4.3.4 Smith 等人的近似统计理论

Harlow 和 Phoenix 从数学角度较精确地导出了以链式模型为代表的复合材料的强度分布，其结果已广为引用，作为各种裂纹扩展统计理论的对比“标准”。感到不足的是，$G_N(\sigma)$或 $W_N(\sigma)$如此重要的分布函数却无相应的解析表达式（只有数值结果），且其计算随着 $N$ 的增加而变得非常繁琐。有鉴于此，Smith（1980，1982），1983 年 Smith 和 Phoenix 把注意力转到寻求一种简单而近似的理论解释方面。基于上述数值分析和结果，有下述的 6 个基本概念。

1）正如从图 4.8 中看到的那样，复合材料的破坏应力远小于 $\sigma_\delta$（注意，对于 $\beta$ 小于 15 的典型值，即使在 0.99 的破坏概率水平下，复合材料的平均强度和应力也远小于 $\sigma_\delta$）。

2）**初始**破坏或**孤立**破坏（即在施加荷载 $\sigma$ 作用下直接断裂的纤维元素）可看为累积型裂纹扩展的**破坏源**（seed），在纤维束内的纤维相继断裂形成的横向裂纹称为横向破坏带（string）。

3）容易看出，这样的破坏源的数目取决于施加应力 $\sigma$ 并且服从参数是 $nN$ 和 $F(\sigma)$的二项分布，其平均数是 $nNF(\sigma)$。

4）当某纤维发生断裂形成破坏源后，相邻纤维将在应力集中的作用下发生相继断裂，裂纹可沿任一方向扩展（与 Argon 假定裂纹扩展模式为断口两侧纤维同时发生断裂的对称扩展不同）形成所谓的**横向破坏带**。

5）如果横向破坏带中含有 $k$ 根纤维相继断裂，则当 $F(K_{k-1}\sigma)<1/2$ 而 $F(K_k\sigma)\approx 1$时，裂纹邻近纤维的断裂几乎必然发生，从而导致横向裂纹的失稳扩展，使复合材料发生破坏。取决于应力水平的 $k$ 值称为**临界裂纹尺寸**，考虑式（4.55），可由下式更好地定义 $k$ 值

$$K_{k-1}\sigma \leqslant \sigma_\delta < K_k\sigma \tag{4.65}$$

6）下述的分析将基于纤维强度较大情形的韦布尔形状参数 $\beta$。

继续进行分析时，首先认识到初始破坏（孤立破坏）实际上相隔很远是很重要的。例如，从图 4.8 中可知，对于 $\beta=5$，复合材料的平均强度约是 $0.27\sigma_\delta$，$F(0.27\sigma_\delta)=0.001\,4$。这就意味着复合材料的初始破坏在纵向的平均间隔为 $(1/0.001\,4)\times\delta\approx 700\delta$，在横向的平均间隔约为 $700d_f$（$d_f$ 为纤维直径）。显然，由于尺寸效应，这种间隔随复合材料体积的增加而增加。下面举例说明为什么尺寸效应意指平均强度随体积的增加而减小。重复从图 4.7 中产生图 4.8 的过程，并注意到图 4.8 中的体积是 $nN=10^9$ 而不是 $10^6$，现在可以看到平均强度仅是 $0.22\sigma_\delta$ 而不

是 $0.27\sigma_\delta$，又因为 $F(0.22\sigma_\delta)=0.000\,52$，所以，平均间隔接近 $2\,000\delta$。值得指出的是，虽然初始破坏现在相隔更远（单位体积内含有的初始断裂数目更少），但是在复合材料中却含有更多的孤立破坏，因为体积增加了 $10^3$（读者也许会感到诧异，体积小的复合材料在接近破坏时单位体积内含有许多孤立破坏，而体积大的复合材料却较少！）。这样，作为一种基本的近似，就可以略去各孤立断裂扩展时的相互影响的可能性，因为临界裂纹尺寸 $k$ 可能是十分小的。

根据这一近似，就可以较容易地求得形成 $k$ 根纤维相继断裂的概率。事实上，在某一链节形成某一临界裂纹的各种可能中，占优势的过程是：在施加应力 $\sigma$ 作用下，某一纤维元素发生初始断裂，然后，相邻纤维将逐根地在过应力 $K_1\sigma, K_2\sigma, \cdots, K_{k-1}\sigma$ 作用下发生断裂。因此，形成这样一种断裂的概率（即某一给定纤维元素成为一初始破坏及其邻近纤维进一步扩展成尺寸为 $k$ 的一个横向破坏带的概率）可以近似为

$$P\{\text{seed } and \text{ string}\} \approx F(\sigma)2F(K_1\sigma)2F(K_2\sigma)\cdots 2F(K_{k-1}\sigma) \tag{4.66}$$

式中出现的因子“2”表示：从初始破坏开始，第二破坏（初始破坏最邻近的某根纤维发生断裂）只能发生在此初始破坏紧邻的两根纤维之一，即有两种断法，其他以此类推。这样，裂纹就可以沿断口左侧或右侧扩展，也可以是对称扩展。很明显，式(4.66)忽略了有关裂纹累积扩展事件的许多细节。考虑到当 $\beta$ 较大时，$F(K_i\sigma) \gg F(K_{i-1}\sigma)$，故其近似程度仍然较好。

设纤维强度分布为式(4.56)所表达的韦布尔分布，将其展开成泰勒级数并略去高阶项，有

$$F(\sigma) \approx (\sigma/\sigma_\delta)^\beta \tag{4.67}$$

当 $\sigma \ll \sigma_\delta$ 时，上式的近似程度相当高。对于 $0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_\delta$，可以认为式(4.66)和式(4.67)也具有很好的近似性。将式(4.67)代入式(4.66)，得

$$\begin{aligned} P\{\text{seed } and \text{ string}\} &\approx 2^{k-1}(\sigma/\sigma_\delta)^\beta(K_1\sigma/\sigma_\delta)^\beta\cdots(K_{k-1}\sigma/\sigma_\delta)^\beta \\ &= 2^{k-1}(K_1K_2\cdots K_{k-1})^\beta(\sigma/\sigma_\delta)^{k\beta} \end{aligned} \tag{4.68}$$

上式约等于号右边各项的重新组合，得到等号右边的表达式，从而产生指数 $k\beta$ 代替 $\beta$，这是从韦布尔分布的使用中产生的一种重要特征。作为变化性的一种减少，它是在复合材料中细观力学**冗余度效应**形成的要点。

在复合材料中，共有 $nN$ 个潜在的破坏源（纤维元素），每个破坏源都可能产生一条横向破坏带（临界裂纹），如果至少一个这样的事件发生，复合材料将发生破坏。我们把某一纤维元素成为初始破坏及其邻近纤维进一步扩展为横向破坏带的事件看成是统计独立的，实际上就产生了最弱环的局面，从而可导出复合材料破坏概率为

$$\begin{aligned} H_{N,n}(\sigma) &\approx 1-[1-P(\text{seed } and \text{ string})]^{nN} \\ &\approx 1-[1-2^{k-1}(K_1K_2\cdots K_{k-1})^\beta(\sigma/\sigma_\delta)^{k\beta}]^{nN} \end{aligned} \tag{4.69}$$

考虑到当 $n\to\infty$ 时，有 $(1-a\sigma^b)^n \to \exp(-na\sigma^b)$ 成立，因此

$$H_{N,n}(\sigma) \approx 1 - \exp[-nN2^{k-1}(K_1K_2\cdots K_{k-1})^{\beta}(\sigma/\sigma_\delta)^{k\beta}] \tag{4.70}$$

这是韦布尔分布的形式，不过，式中的 $k$ 取决于满足式(4.65)的应力 $\sigma$。

在讨论式(4.70)的几个重要特点之前，对特征分布函数 $W(\sigma)$ 进行某种联系是有用的。对于 $k=1,2,3,\cdots$，令

$$F^{[k]}(\sigma) = 1 - \exp[-d_k(\sigma/\sigma_\delta)^{k\beta}] \tag{4.71}$$

其中

$$d_k = 2^{k-1}(K_1K_2\cdots K_{k-1})^{\beta} \tag{4.72}$$

式(4.71)给出了一组具有按照 $k$ 增加的形状参数 $k\beta$ 的韦布尔分布。此外，遵循式(4.65)，可以把重要的应力范围 $0\leqslant\sigma\leqslant\sigma_\delta$ 分成若干段

$$\sigma_\delta/K_k < \sigma \leqslant \sigma_\delta/K_{k-1}, \quad k = 1,2,3,\cdots \tag{4.73}$$

对每一个 $k$，限制相应的分布至其合适的应力范围。于是，式(4.70)成为

$$H_{N,n}(\sigma) \approx 1 - [1 - F^{[k]}(\sigma)]^{nN} \tag{4.74}$$

式中的 $k$ 和 $\sigma$ 应满足式(4.73)。比较式(4.64)和式(4.74)后，可知 $W(\sigma)$ 的一种近似表达式为

$$W(\sigma) \approx F^{[k]}(\sigma) \tag{4.75}$$

其中，$k$ 和 $\sigma$ 也应满足式(4.73)。

图 4.9 示出了 $\beta=5$ 的 $W(\sigma)$ 和 $F^{[k]}(\sigma)(k=1,2,3,\cdots)$ 随 $(\sigma/\sigma_\delta)$ 的变化曲线，图中的每一条曲线均延伸到整个应力范围($0\leqslant\sigma\leqslant\sigma_\delta$)。对于每一个应力水平 $\sigma$，均

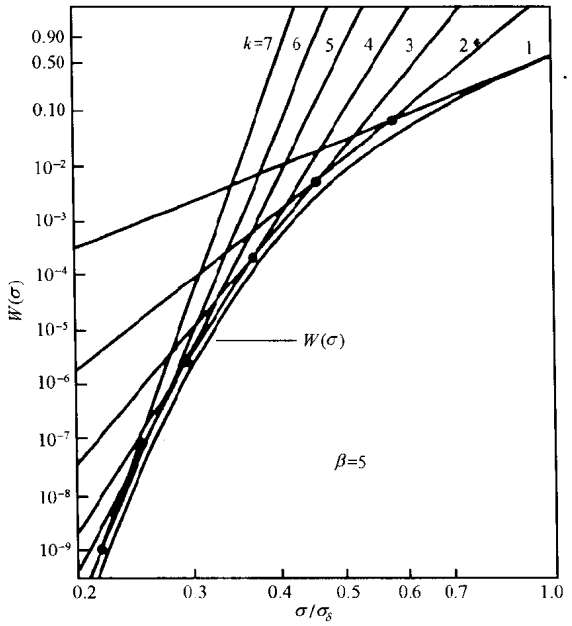



图 4.9 $W(\sigma)$ 和 $F^{[k]}(\sigma)(k=1,2,3,\cdots)$ 随 $(\sigma/\sigma_\delta)$ 的变化曲线

有一条韦布尔分布曲线非常接近 $W(\sigma)$ 曲线，实际上，它是其 $k$ 值满足式(4.73)的那条曲线。感到遗憾的是，画图表示式(4.75)时却具有锯齿状的外表，这是由于当 $k$ 值改变时，在式(4.73)边界的过渡应力处，会发生小小的“跳跃”。采用韦布尔分布曲线簇的内包络线可以使锯齿状的曲线近似光滑，即

$$W(\sigma) = \min\{F^{[1]}(\sigma), F^{[2]}(\sigma), F^{[3]}(\sigma), \cdots\} \tag{4.76}$$

图 4.9 表明这种近似性相当好。

原则上，我们能够绘出当 $\beta=3,7,10,\cdots,50$(见图 4.7)时类似于图 4.8 的其他图。对于某一给定的体积 $V$，根据图 4.7 绘出图 4.8，就可发现图中的韦布尔情形之一(即 $k$ 的一个值)将对每一个 $\beta$ 值占有支配地位，这就说明了图 4.8 中的每一条曲线为什么近似是直的。对于每条曲线，根据图 4.8 中相关的应力范围，由式(4.73)就能够确定合适的 $k$ 值及韦布尔形状参数 $k\beta$，尤其是靠近中部。例如，对于 $\beta=10, k=3$ 对绘制图 4.8 是合适的，相应地复合材料强度的韦布尔形状参数约为 $3\times10=30$(根据图 4.8 中 $\beta=10$ 的那条线段的斜率来确定)。

现在，可以确定图 4.8 中每一条曲线的合适的韦布尔分布。把合适的韦布尔分布 $F^{[k]}(\sigma)$ 代入式(4.74)，产生下述的复合材料强度的韦布尔近似

$$H_{N,n}(\sigma) \approx 1 - \exp[-(\sigma/\sigma_{k,nN})^{k\beta}] \tag{4.77}$$

其中

$$\sigma_{k,nN} = \sigma_{\delta}(nNd_k)^{-1/(k\beta)} \tag{4.78}$$

对于每个 $\beta$ 值，只要用上述图示的方案来选择 $k$，则这种韦布尔近似非常符合图 4.8 中的曲线。当然，如果显著地改变体积 $V=nN$，那么 $k$ 也随之而改变。

在这个阶段，回想 $k$ 解释为“临界裂纹尺寸”是重要的。给定复合材料体积 $nN$ 和纤维强度韦布尔形状参数 $\beta$，可以形成一个特殊的 $k$ 值，它是这样的复合材料破坏时的最长裂纹尺寸或最长的纤维断裂带。这个 $k$ 值也确定了复合材料强度的有效的韦布尔形状参数 $k\beta$。到此为止，合适的 $k$ 值的计算是用图解的方式进行的，但是，解析地估计 $k$ 是可能的，Smith 和 Phoenix(1983)给出了该方法。首先考察下式

$$\sigma_{\delta}/K_k < \sigma_{k,nN} \leqslant \sigma_{\delta}/K_{k-1} \tag{4.79}$$

对于大数 $nN$，由上式导出合适的 $k$ 值需满足下式

$$\gamma(k) > \ln(nN)/\beta > \gamma(k-1) \tag{4.80}$$

其中

$$\gamma(r) = r\ln(K_r) - [\ln(K_1) + \ln(K_2) + \cdots + \ln(K_{r-1})], \quad r = 1,2,3,\cdots \tag{4.81}$$

且有 $\gamma(0)=0$。对于 $K_i=1+i/2$，可以列表显示下述结果。

| $r$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\gamma(r)$ | 0 | 0.405 | 0.981 | 1.65 | 2.38 | 3.15 | 3.95 | 4.78 | 5.62 | 6.48 |

根据式(4.80)，临界值 $k$ 取决于 $\ln(nN)/\beta$ 比，因而，它随复合材料体积的增

加而缓慢增加，但随纤维强度离散性的减小($\beta$增加)却快速地减小。

作为一个例子，对于图 4.8 中的 $\beta=5$，图解过程是将应力范围放在靠近 $0.27\sigma_\delta$(根据图 4.9 或式(4.73)，令 $k=5$)处。另一方面，因为 $\ln(10^6)/5=2.76$，再由式(4.80)和式(4.81)及上表中相关的数据，所以同样可以求得 $k=5$。因而，所描述的复合材料的有效韦布尔形状参数为 $k\beta=25$。

有意义的是考虑复合材料的最终尺寸效应。在某种韦布尔分布的情形中，强度是随体积 $V$ 并与 $V^{-1/\beta}$成比例地减小的。另一方面，图 4.7 和图 4.8 中曲线的曲率连同我们的研究结果——$k$ 随体积 $V(=nN)$的增加而缓慢增加，使人联想到复合材料的强度不仅是在最后具有某种韦布尔尺寸效应，而且随体积的增加较和缓地增加。Smith(1980,1982)考虑了这个问题并得出了如下结论：

$$\text{复合材料的强度} \approx \beta 2^{1-1/\beta}\sigma_\delta/\ln V \tag{4.82}$$

上式表明，强度与体积对数的倒数成反比，作为这一结果，式(4.82)过高地估计了复合材料的强度。为了使这个结果精确，复合材料的体积必须是极其巨大的 $(V>10^{20})$。

在结论中，应该提及上述分析的几个延拓性和局限性。正如前面所说明的那样，给出的结果均基于“足够大”的 $\beta$，这就允许我们写出近似式(4.66)，从而导出了式(4.68)，然后给出了式(4.72)中 $d_k$ 的定义。正如较早前所提及的那样，如果避免某些破坏概率的“重叠计数”(double counting)，那么，在式(4.66)中暗指的事件的计算就更复杂。例如，对于 $k=2$，更精确的计算是

$$\begin{aligned} P\{\text{seed } and \text{ string}\} &\approx 2F(\sigma)[F(K_1\sigma)-F(\sigma)]+F^2(\sigma) \\ &= 2F(\sigma)F(K_1\sigma)-F^2(\sigma) \\ &\approx (2K_1^\beta-1)(\sigma/\sigma_\delta)^{2\beta} \end{aligned} \tag{4.83}$$

所以，$d_2$ 应是$(2K_1^\beta-1)$而不是 $2K_1^\beta$。同样的分析表明，$d_3$ 实际上应为

$$d_3=4(K_1K_2)^\beta-K_1^{2\beta}-K_2^\beta-2K_1^\beta+1$$

对于较大的 $k$ 也可如此类推。然而，结果却是这些细致的改进与近似计算之间的差别相差甚小，尤其是在计算式(4.78)中的 $\sigma_{k,nN}$值时，其误差仅为 1%或 2%。

上述结果可以推广到由式(4.55)所定义的局部荷载分担的理想化情形中，但也表明，只要选择 $K_r$ 为某一破坏构造边缘处的最大荷载分担常数，上述结果就适用于更实际的情形。通常，这样的 $K_r$ 值比$(1+r/2)$小得多(参见 Hedgepeth 结果)。根据上述分析，主要影响是不仅增加了强度的尺寸参数，从而增加了复合材料本身的强度，而且增加了临界的 $k$ 值，从而减小了复合材料的离散性。其次，对于具有形成一种二维六角形排列的平行纤维的三维复合材料，Smith 等(1983)曾经进行了分析。这时，纤维的连续断裂可以按许多不同的几何构造进行下去，而并非按直线方式。但是，对于足够大的 $\beta$，除 $2^{k-1}$用某种更加复杂的构造常数来替换之外，人们仍然能够提出在结构上类似于式(4.72)中的 $d_k$ 的一种表达式。除了人们的确不再

发现临界裂纹尺寸 $k$ 与复合材料强度的有效韦布尔形状参数之间的同样的简单关系之外，尚有许多概念需要贯彻。此种复合材料的强度比上述二维平面情形的要大得多，其理由是虽然三维情形具有更多的破坏构造，但是，在裂纹邻近却具有较多的完整纤维分担断裂纤维所卸下的荷载，使得应力集中 $K_r$ 值减小，大大补偿了所增加的破坏概率，特别是对于足够大的 $\beta$。

Phoenix、Schwartz 和 Robinson(1988)提供了说明上述特点的实验数据，并把上述概念扩展到基体为黏弹性的情形，解释了恒定应力作用下的蠕变破裂现象。

### 4.3.5 蒙特卡罗模拟

**蒙特卡罗模拟**方法是适合于模拟复杂随机过程的一种数值技术，它已被用来分析统计性质的物理过程，是一种十分有前景的细观力学数值计算方法，已被广泛应用于多门学科的研究中。

蒙特卡罗随机模拟方法的基本思想是按一定的概率分布用蒙特卡罗方法随机确定纤维断裂的位置，采用剪滞模型分析因一根纤维断裂而引起的应力重新分布。此过程一直进行下去，可以模拟出复合材料的整个破坏过程，并得到其最终强度。

在蒙特卡罗实验中，首先产生随机数并分配给基本的随机变量，然后观察此过程的结果。当这样的独立试验数足够多时，观察资料将给予此过程的统计特性一个良好评价。在处理纤维及复合材料的强度中，蒙特卡罗实验首先把纤维或复合材料划分成元素，然后把随机数分配给这些元素的强度。对于某一给定的施加荷载，在纤维或复合材料元素中的应力可以由第二章所述的剪滞分析确定，从所分配的强度值及元素断裂的排列，即可获得破坏荷载。

基于蒙特卡罗方法，Fukuda 和 Kawata(1977)，Oh(1979)研究了二维纤维复合材料的破坏问题，所选取的无量纲平均强度为 100，标准差为 10。对于 $E_f/E_m=20$ 及 $N=n=20$，其中 $N$ 和 $n$ 分别为以前所定义的单向复合材料试样中的纤维根数和链式模型中的链节数，断裂过程的模拟示于图 4.10 中。

在模拟过程中，用 $(i,j)$ 来标明已被划分的复合材料试样中的元素或节点的位置。图 4.10 中，0 表示节点不破坏，其他的数字则表示节点断裂的次序。作为初始条件，假定每一节点 $(i,j)$ 具有某一随机强度 $\mathrm{STR}(i,j)$，它是具有某一平均的特定值和标准差的正随机数。采用韦布尔分布和正态分布来表达节点的强度分布。开始时，所有节点的应力集中因子 $\mathrm{SCF}(i,j)$ 均设为 1。找寻具有最小的 $\mathrm{STR}(i,j)/\mathrm{SCF}(i,j)$ 值的某一节点，并令此节点为 $(i_0,j_0)$，此节点首先在拉伸应力 $\mathrm{STR}(i_0,j_0)$ 作用下发生破坏。该节点破坏后，其邻近的两节点 $(i_0,j_0\pm1)$ 将产生应力集中。对于剩余的 $(N\times n-1)$ 个节点，再次计算 $\mathrm{STR}(i,j)/\mathrm{SCF}(i,j)$ 值。具有最小值的某一节点然后发生断裂。重复上述步骤，直至垂直于荷载方向的某一平面内的所有节点 $(j=1,2,\cdots,M)$ 全部发生破坏为止。

图 4.10 给出的结果类似于 Rosen(1964)的实验工作中所观察到的纤维断裂

次序。复合材料的强度估计示于图 4.11。必须指出，受计算机内存的限制，蒙特卡罗方法通常局限于 $nN<50\ 000$，这对实际的复合材料来说可能是远远不够的。还有，蒙特卡罗方法在处理统计分布的低值区域时，存在固有的不足，其结果较差。

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 33 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 39 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 38 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 40 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 43 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 41 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 18 | 44 | 45 | 31 | 46 | 47 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 42 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 50 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 62 | 59 | 58 | 57 | 56 | 55 | 54 | 53 | 52 | 51 | 50 | 49 | 48 | 60 | 61 | 37 | 16 | 36 | 35 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 19 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 20 | 0 | 0 | 0 | 0 | 32 | 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 21 | 0 | 0 | 13 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 34 | 29 | 28 | 14 | 27 | 26 | 25 | 6 | 15 | 24 | 22 | 8 |
| 0 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 18 | 0 | 23 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

图 4.10　蒙特卡罗模拟的复合材料断裂过程

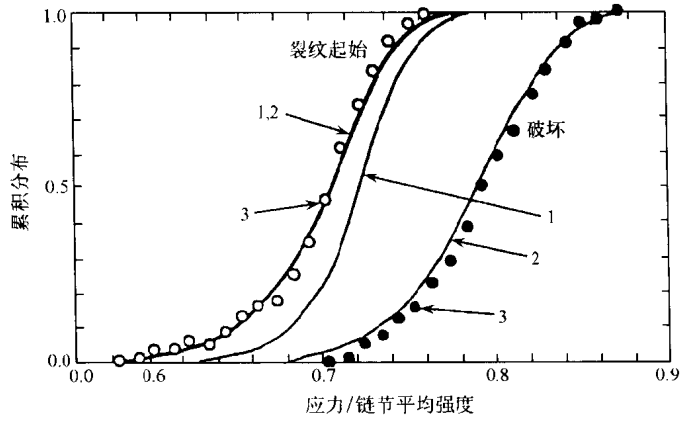



图 4.11　蒙特卡罗模拟结果

## 4.4　纤维束模型与链式模型相结合的方法

Zhu 等(1989)采用图 4.3 所示的链式模型和纤维束模型，提出了单向复合材料轴向拉伸强度的一种统计理论。考虑一链节中任一纤维断裂后，仅其紧邻的完整纤维承受应力集中的作用。对于二维排列的纤维，断口紧邻纤维的应力集中因子为

$K=4/3$，所承受的过应力为 $K\sigma$；如果断口紧邻有 4 根（正方排列）或 6 根纤维（六角形排列），则相应的应力集中因子分别是 $K=1.146$ 或 $1.104$。

考虑由 $N$ 根纤维构成的复合材料受轴向拉伸荷载 $P$ 作用的情形，已有 $N_f$ 根纤维发生了断裂。设 $N_h$ 为未断裂的纤维根数，$N_c$ 为断口（裂纹）紧邻的纤维根数，$N_i$ 为不受应力集中影响的纤维根数（它们承受应力 $\sigma_i$ 的作用）。如果某根断纤维紧邻的纤维数为 $a$，则有

$$N_c = aN_f \tag{4.84}$$

$$N_h = N - N_f \tag{4.85}$$

$$N_i = N - (a+1)N_f \tag{4.86}$$

$$\sigma = \frac{N_i}{N}\sigma_i + \frac{N_c}{N}K\sigma \tag{4.87}$$

将式(4.84)和式(4.86)代入式(4.87)，有

$$\sigma_i = \sigma\left[\frac{1 - aKN_f/N}{1-(a+1)N_f/N}\right] \tag{4.88}$$

考虑到复合材料破坏前，有 $N_f \ll N$，故可近似假定 $\sigma_i \approx \sigma$。

当施加荷载增加 $dP$ 时，平均应力 $\sigma$ 也增加 $d\sigma$。如果纤维的强度服从某一概率分布函数 $F(\sigma)$，那么，某根断纤维紧邻的完整纤维发生破坏的概率可以由下式给出

$$F(K\sigma + Kd\sigma) - F(K\sigma)$$

不受应力集中影响的纤维发生破坏的概率是

$$F(\sigma + d\sigma) - F(\sigma)$$

假定由于荷载的增加，有 $dN_f$ 根纤维发生断裂，有

$$dN_f = N_c[F(K\sigma + Kd\sigma) - F(K\sigma)] + N_i[F(\sigma + d\sigma) - F(\sigma)]$$

或

$$\frac{dN_f}{d\sigma} = N_c\frac{dF(K\sigma)}{d\sigma} + N_i\frac{dF(\sigma)}{d\sigma} \tag{4.89}$$

将式(4.84)和式(4.86)代入式(4.89)，有

$$\frac{dN_f}{d\sigma} + \left[(a+1)\frac{dF(\sigma)}{d\sigma} - a\frac{dF(K\sigma)}{d\sigma}\right]N_f = N\frac{dF(\sigma)}{d\sigma} \tag{4.90}$$

上式的边界条件是

$$N_f(0) = 0 \tag{4.91}$$

假定纤维的强度服从韦布尔分布（式(4.42)），即概率分布函数为

$$F(\sigma) = 1 - \exp(-\alpha\delta\sigma^\beta) \tag{4.92}$$

概率密度函数为

$$f(\sigma) = \frac{dF(\sigma)}{d\sigma} = \alpha\delta\beta\sigma^{\beta-1}\exp(-\alpha\delta\sigma^\beta)$$

其中，$\alpha=\sigma_0^{-\beta}$ 也称为韦布尔尺度参数。因此，式(4.90)和式(4.91)的解答为

$$N_f(\sigma) = N\exp[(a+1)\exp(-\alpha\delta\sigma^\beta) - a\exp(-\alpha\delta m\sigma^\beta)]T \tag{4.93}$$

其中

$$T = \int_x^1 \exp[-(a+1)X + aX^m]\mathrm{d}X,$$

$$X = \exp(-\alpha\delta\sigma^\beta), \quad m = K\beta \tag{4.94}$$

一链节中的纤维束承受的最大荷载由下式给出

$$P_m = \max(N_h A_f \sigma) \tag{4.95}$$

因此,纤维束破坏时的平均纤维应力的期望是

$$\bar{\sigma}_b = \frac{P_m}{NA_f} \tag{4.96}$$

将式(4.85)和式(4.95)代入式(4.96),有

$$\bar{\sigma}_b = [1 - N_f(\bar{\sigma}_m)/N]\bar{\sigma}_m \tag{4.97}$$

其中 $\bar{\sigma}_m$ 由下式求出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}[(1 - N_f/N)\sigma] = 0 \tag{4.98}$$

对于 $N$ 很大的一束纤维,Daniels 已经证明纤维束破坏时的平均纤维应力 $\sigma_b$ 近似为正态分布,其均方差是

$$s_b = \bar{\sigma}_m\{F(\bar{\sigma}_m)[1 - F(\bar{\sigma}_m)]\}^{\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{2}} \tag{4.99}$$

相关的概率密度函数是

$$p_b(\sigma_b) = \frac{1}{s_b\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\sigma_b - \bar{\sigma}_b)^2}{2s_b^2}\right] \tag{4.100}$$

累积分布函数是

$$G(\sigma) = \int_0^{\sigma_b} p_b(\sigma_b)\mathrm{d}\sigma_b \tag{4.101}$$

对于由 $n$ 节链条串成的复合材料,应根据最弱环定理来确定复合材料的破坏,其破坏的概率密度函数由下式定义

$$\lambda(\sigma_{fu}) = np_b(\sigma_{fu})[1 - G(\sigma_{fu})]^{n-1} \tag{4.102}$$

其中,$\sigma_{fu}$是复合材料破坏时的纤维平均应力。令

$$\frac{\mathrm{d}\lambda(\sigma_{fu})}{\mathrm{d}\sigma_{fu}} = 0 \tag{4.103}$$

有

$$\left\{1 - \int_0^{\sigma_{fu}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}s_b}\exp\left[-\frac{(\sigma_{fu} - \bar{\sigma}_b)^2}{2s_b^2}\right]\mathrm{d}\sigma_{fu}\right\}\frac{\sigma_{fu} - \bar{\sigma}_b}{s_b}$$

$$+ \frac{n-1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\sigma_{fu} - \bar{\sigma}_b)^2}{2s_b^2}\right] = 0 \tag{4.104}$$

求解上式可以获得复合材料破坏时纤维应力的期望 $\bar{\sigma}_{fu}$。因此,复合材料的拉伸强度可由下式求出

$$\sigma_{cu} = V_f\bar{\sigma}_{fu} + (1 - V_f)\sigma'_m \tag{4.105}$$

其中，$\sigma'_m$ 是复合材料破坏时基体所承受的应力。对于树脂基，$\sigma'_m \ll \bar{\sigma}_{fu}$，因此，

$$\sigma_{cu} \approx V_f\bar{\sigma}_{fu} \tag{4.106}$$

仿照 Rosen 关于无效长度的推导(式(4.32))，求得条带(ribbon)的无效长度是

$$\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{wtE_f}{2G_m}\right)^{1/2}\left\{\frac{\left[(C-1)^2 + 4C/V_f\right]^{1/2} - C - 1}{1 + C}\right\}\mathrm{ch}^{-1}\frac{1 + (1-\phi)^2}{2(1-\phi)} \tag{4.107}$$

式中，$w$ 和 $t$ 分别为条带的宽度和厚度；$C = w/t$。

Rosen(1964)曾对 2 组单向纤维增强复合材料试样(分别用 B 和 C 组表示)进行了轴向拉伸破坏实验，B 组的实验破坏范围大致是 1 033.5 ～1 156.2 MPa，C 组则为 988.1～1125.9MPa。采用 Zweben 所给的数据，由 Rosen 理论所估计的复合材料的统计强度是 1 282.3 MPa(比实验值高)，Zweben 理论的估计值为 975.0 MPa(比实验值低)，而用上述方法估计的强度值为 1 178.9 MPa(与实验值较接近)。

## 4.5 随机扩大临界核统计模型

以上讨论的各种裂纹扩展统计理论，大部分均基于链式模型并涉及裂纹扩展方式。现有各种模型和理论或者存在一些局限性，或者理论值与实验值相距较远。曾庆敦和范赋群等(1994)认为，其主要原因还是链式模型本身所固有的一些不足之处所造成的。

1) 链式模型所考虑的裂纹扩展，通常局限在极短的某一 $\delta$ 层内，即裂纹是接近自相似方式扩展的。

2) 各链节的断裂事件认为是统计无关的。事实上，随着裂纹的累积扩展，裂纹附近上下层的断裂事件的相关性也随之增大，尤其是有基体或界面损害时，不同层的断裂可能由这些纵向损害构成贯穿裂纹。

3) 精确地计算某一 $\delta$ 层中纤维束的破坏概率仍是极困难的工作。

4) 如何选取和决定无效长度 $\delta$，在理论分析上有不同的见解。Argon 认为应取过载区长度作为 $\delta$。对于延性基体，他建议选取裂纹附近塑性区长度作为无效长度，因为在此区域内，断口邻近纤维的应力有较大的增长。Rosen 通过计算一条已断纤维本身的应力分布，认为断口一侧的应力衰减区(应力不超过远场纤维平均应力的 90%)可作为无效长度，这种看法显然不够合理。Zweben 认为，采用 Rosen 所定义的无效长度作为链节的长度，较为符合链式模型的本意。范赋群指出，无论是过载区长度还是无效长度，都应随裂纹的扩展而增加。Phoenix 等认为，无效长度 $\delta$ 应随应力水平的增加而增加。鉴于无效长度 $\delta$ 在链式模型中的重要性，如何合理地选择无效长度作为链节长度仍需进一步研究。

由于复合材料所特有的非连续性、非均匀性和破坏模式的复杂性，给统计断裂理论的建立带来了极大的困难。链式模型的建立，虽然推动了复合材料细观统计断裂理论的发展和给出较好的定性描述，但是其强度预报仍与实际相距较远，其主要原因在于模型本身不够完善。近年来，由曾庆敦和范赋群等(1994)提出的随机扩大临界核统计模型和理论，可以较好地克服链式模型所固有的缺点。

### 4.5.1 模型的描述

沿纤维方向承受纵向拉伸的单向纤维增强复合材料，其最终破坏必然是纤维被拉断。在这一受载情形下，由于纤维强度的离散性，较弱纤维首先被拉断，从而产生拉、剪应力集中，它们可能导致基体的破坏和纤维/基体界面的剪切屈服或脱黏，邻近纤维在上述因素作用下也可能发生断裂。显然，承受过应力的纤维在何处断裂也具随机性，如断在复合材料统计断裂理论中称为无效长度的范围之外，它的断裂则与原始断口不连接(孤立断裂)，只有断在此长度之内，原始断口才得以继续扩展，形成两条纤维断裂的连贯裂纹。此连贯裂纹又可导致邻近基体和界面的破坏，而邻近纤维也将在较长的无效长度内承受较大的应力集中，其破坏便可能发生。裂纹沿纵横两个方向按上述破坏方式随机稳定地扩大，直至临界尺寸，此时，临界裂纹邻近纤维的过应力将超过纤维段本身的强度，它的断裂几乎必然发生(裂纹失稳扩展)，从而导致复合材料的破坏。这种临界裂纹被称为**随机扩大的临界核**。

复合材料的这种随机破坏过程，可采用图 4.12 所示的随机扩大临界核统计模型来表示。此模型的要点如下：复合材料中总存在一些微观或细观的缺陷源，在拉伸荷载作用下，最不利者先稳定扩展，次不利者随之相继扩展，……；又有新的裂纹源生成；……；某个缺陷源沿纵横两个方向扩展到某临界尺度(相继断纤维的数目达到某临界值 $r$，无效长度也逐渐扩大到某临界值 $\delta_{r-1}$)，便构成了**随机临界核**。当至少形成一个临界核时，复合材料便发生破坏。临界核(或裂纹)随机地沿纵横方向的失稳扩展或它们之间的互相串接，可形成极不规则的宏观断口(如图 4.12 中的断裂线所示)。

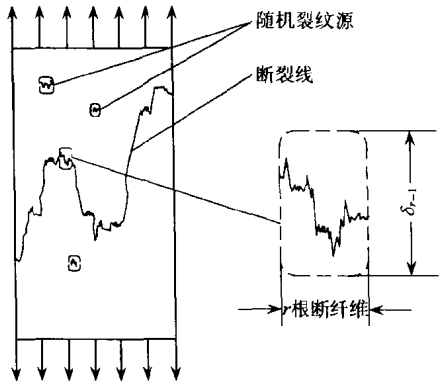


图 4.12 随机扩大临界核统计模型

### 4.5.2 纤维强度性能、应力集中及无效长度

为了计算复合材料的破坏概率，下面先讨论与此密切相关的纤维强度分布规律、纤维应力集中及逐渐扩大的无效长度。

纤维的强度具有很大的离散性且与长度有关。已有的研究表明，纤维的强度遵

循一定的分布规律。可用于描述纤维强度的分布函数主要有正态分布和韦布尔分布。下面假定长为 $\delta$ 的纤维的强度分布函数为两参数韦布尔分布(式(4.42)和式(4.92))

$$F(\sigma) = 1 - \exp(1 - \alpha\delta\sigma^{\beta}) \tag{4.108}$$

式中,$F(\sigma)$是长为 $\delta$ 的纤维在应力 $\sigma$ 作用下的破坏概率;$\alpha$ 和 $\beta$ 为韦布尔参数。

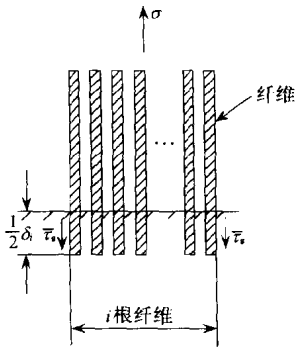


图 4.13 拔出长度的计算模型

在 2.3.3 标题中采用计及界面破坏的修正的剪滞模型,研究了界面损伤对单向复合材料应力集中的影响,结果表明,应力集中与无量纲界面剪切强度 $\bar{\tau}_s$、断裂纤维数 $r$ 有关。在下面的统计分析中,将采用这些应力集中的计算结果。

在统计分析中,还有一个重要的问题是如何选取合适的无效长度。范赋群和曾庆敦认为,可以选取纤维拔出长度的 2 倍作为统计分析中的逐渐扩大的无效长度,这样可顾及基体和界面的破坏并可避免采用近似方法而引起的误差积累。图 4.13 示出了拔出长度的计算模型。设拔出 $i(i=1,2,\cdots)$根纤维的拔出长度为$\frac{1}{2}\delta_i$,按极限平衡有

$$i\sigma A_f = 2 \times \frac{1}{2}\delta_i h\tau_s \tag{4.109}$$

式中,$\sigma$ 为纤维远场应力;$A_f$ 为纤维横截面面积;$h$ 为复合材料单层厚度;$\tau_s$ 为纤维基体界面剪切强度。2.3.3 标题中给出了 $\tau_s$ 与无量纲界面剪切强度 $\bar{\tau}_s$ 的关系式(式(2.115))

$$\bar{\tau}_s = (\tau_s/\sigma)\sqrt{E_f h d/(A_f G_m)} \tag{4.110}$$

式中,$E_f$ 为纤维的弹性模量;$G_m$ 为基体剪切模量;$d$ 为纤维间距。将上式代入式(4.109)并整理得

$$\delta_i = i[E_f/(G_m V_f)]^{1/2} d_i/\bar{\tau}_s \tag{4.111}$$

式中,$V_f = A_f/(hd)$为纤维体积分数;$d_i \approx dV_f$ 为纤维直径。上式即为计及界面剪切强度的逐渐扩大的无效长度的表达式。

以 $\delta_i$ 代 $\delta$,$K_i\sigma$ 代 $\sigma$,由式(4.108)得承受过应力的纤维段的破坏概率为

$$\begin{aligned} F(K_i\sigma) &= 1 - \exp[-\alpha\delta_i(K_i\sigma)^{\beta}] \\ &= 1 - \exp\left[-\left(\frac{K_i\sigma}{\tilde{\sigma}_i}\right)^{\beta}\right], \quad i = 1,2,\cdots \end{aligned} \tag{4.112}$$

其中,$\tilde{\sigma} = (\alpha\delta_i)^{-1/\beta}$。

长为 $\delta_i$ 的纤维的统计平均强度由下式求得

$$\bar{\sigma}_i = \int_0^{\infty} \sigma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}[1 - \exp(-\alpha\delta_i\sigma^{\beta})]\mathrm{d}\sigma$$

$$= (\alpha\delta_i)^{-1/\beta}\Gamma(1+1/\beta), \quad i=1,2,\cdots \tag{4.113}$$

其中，$\Gamma(\cdot)$为伽马函数。因为$\Gamma(\cdot)\approx 1$，所以$\bar{\sigma}_i \approx \tilde{\sigma}_i$。

### 4.5.3 强度分布函数和破坏准则

对于受纵向拉伸的复合材料，在形成具有$r$根纤维连续断裂的某个裂纹核的各种可能中，占优势的破坏过程是：在远场纤维应力$\sigma$的作用下，某一“最弱”纤维首先发生断裂，然后，相邻纤维将逐根地在过应力$K_1\sigma, K_2\sigma, \cdots, K_{r-1}\sigma$作用下发生相继断裂，其中$K_i(i=1,2,\cdots)$是计及界面损伤的纤维应力集中因子，取自2.3.3标题中的计算结果。伴随纤维断裂而发生的基体破坏、界面剪切屈服等因素将通过应力集中因子和无效长度引进到随机临界核理论中。设应力水平$\sigma$满足$\sigma \leqslant \bar{\sigma}_{r-1}/K_{r-1}$，根据概率论，形成至少$r$根纤维连续断裂的某个裂纹核的概率为

$$P(\sigma) = H_0(\sigma)H_1(\sigma)\cdots H_i(\sigma)\cdots H_{r-1}(\sigma) = 2^{r-2}F(\sigma) \times \left\{\prod_{i=1}^{r-2} F(K_i\sigma)[1-F(K_i\sigma)]\right\} F(K_{r-1}\sigma)[2-F(K_{r-1}\sigma)] \tag{4.114}$$

式中，$H_0(\sigma)=F(\sigma)=1-\exp(-\alpha\delta_0\sigma^\beta)$是长为$\delta_0$(取$\delta_0=\delta_1$)的某一“最弱”纤维在应力$\sigma$作用下的破坏概率；$H_i(\sigma)=2F(K_i\sigma)[1-F(K_i\sigma)](i=1,2,\cdots,r-2)$为$i$根纤维断裂后，邻近长为$\delta_i$的两根过应力纤维恰好一根断裂的概率；$H_{r-1}(\sigma)=1-[1-F(K_{r-1}\sigma)]^2=F(K_{r-1}\sigma)[2-F(K_{r-1}\sigma)]$为$(r-1)$根纤维断裂后相邻两条过应力纤维至少一根断裂的概率。

如果此裂纹核邻近的某根过应力纤维的破坏概率超过$1-e^{-1}\approx 0.632$，由式(4.112)可得$K_r\sigma > \tilde{\sigma}_r \approx \bar{\sigma}_r$(或$K_{r+1}\sigma > \bar{\sigma}_{r+1}$)，即$\sigma > \bar{\sigma}_r/K_r$或$(\sigma > \bar{\sigma}_{r+1}/K_{r+1})$，或者说，如果此裂纹邻近的某根纤维的过应力$K_r\sigma$(或$K_{r+1}\sigma$)大于纤维段的统计平均强度$\bar{\sigma}_r$(或$\bar{\sigma}_{r+1}$)，就必然发生断裂。因此，当施加应力$\sigma$满足

$$\bar{\sigma}_r/K_r < \sigma \leqslant \bar{\sigma}_{r-1}/K_{r-1} \quad 或 \quad \bar{\sigma}_{r+1}/K_{r+1} < \sigma \leqslant \bar{\sigma}_{r-1}/K_{r-1} \tag{4.115}$$

的条件时，裂纹核就发生失稳扩展，它构成了所谓的随机临界核，此核包含有$r$或$(r+1)$根相继断裂的纤维，式(4.114)中的$P(\sigma)$也就成为形成这个临界核的概率。

设$L$和$W$分别为复合材料试样的长度和宽度，$d$为纤维间距，$N$为试样中的纤维总数$(N=W/d)$。整个试样中最多可能形成的随机临界核的个数为

$$m = \mathrm{Int}[LN/(r\delta_{r-1})] \quad 或 \quad m = \mathrm{Int}[LN/(r+1)\delta_{r-1}] \tag{4.116}$$

式中的符号Int表示取整数。根据随机临界核的统计独立性，可以导出复合材料中至少形成一个随机临界核的概率(即复合材料的破坏概率)为

$$G(\sigma) = 1-[1-P(\sigma)]^m \tag{4.117}$$

上式即为计及界面剪切强度效应的单向复合材料的**强度分布函数**。

为了确定复合材料破坏时的远场纤维应力$\sigma_{fu}$，可令$G(\sigma)=G_0(0\leqslant G_0\leqslant 1)$表征复合材料的破坏。由式(4.114)～(4.117)便得到复合材料的破坏准则

$$\left.\begin{aligned} &1-[1-P(\sigma)]^m = G_0 \\ &\bar{\sigma}_r/K_r < \sigma \leqslant \bar{\sigma}_{r-1}/K_{r-1} \quad 或 \quad \bar{\sigma}_{r+1}/K_{r+1} < \sigma \leqslant \bar{\sigma}_{r-1}/K_{r-1} \end{aligned}\right\} \tag{4.118}$$

以Ⅱ型(高强)碳纤维/环氧复合材料为例进行计算。其中Ⅱ型(高强)碳纤维的数据为 $\alpha=0.055$，$\beta=7.0$，$d_f=10\mu m$；基体弹性模量 $E_m=3.45GPa$，切变模量 $G_m=1.26GPa$。设 $V_f=0.6$(基体体积分数 $V_m=0.4$)，$LN=83.3m$。

令 $G_0=0.5$，由前述的统计分析可求得复合材料破坏时的远场纤维应力 $\sigma_{fu}$，再由混合法则求出复合材料的统计强度

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu}(V_f + E_m V_m/E_f) \tag{4.119}$$

图 4.14 示出了 $\sigma_{fu}$ 随 $\bar{\tau}_s$ 的变化曲线。结果表明，复合材料的纤维临界断裂数 $r$ 与 $\bar{\tau}_s$ 有关，且随着 $\bar{\tau}_s$ 的增加有所减小：当 $0.05\leqslant\bar{\tau}_s\leqslant0.11$ 时，$r=6$；当 $0.11<\bar{\tau}_s\leqslant0.5$ 时，$r=5$；当 $\bar{\tau}_s>0.5$ 时，$r=4$。从图中可看出，存在一个最佳的界面剪切强度，与之对应的复合材料具有最高的拉伸强度。本例中计算的Ⅱ型(高强)碳纤维/环氧的最佳 $\bar{\tau}_s$ 约为 0.11。作为验证和比较，图中还给出了 Manders 和 Bader 的实验结果，可见，本例结果均在实验范围内。

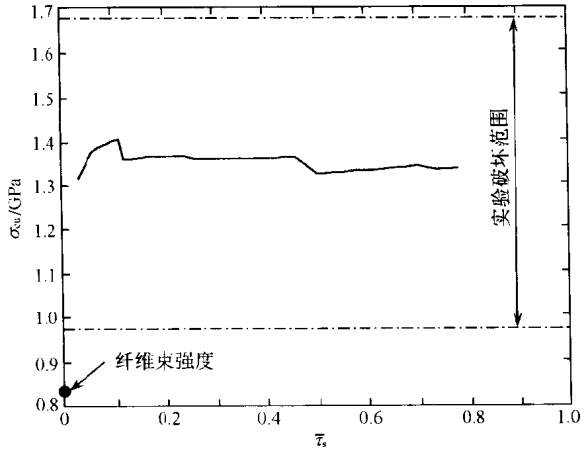



图 4.14 $\sigma_{cu}$ 与 $\bar{\tau}_s$ 的关系

$\bar{\tau}_s$ 对 $\sigma_{cu}$ 的影响主要取决于应力集中和无效长度。当 $\bar{\tau}_s$ 较小时，纤维应力集中变小，但无效长度变大，无效长度的增加导致受过应力的纤维的破坏概率增加，这样，复合材料的强度就相应减小。当 $\bar{\tau}_s=0$ 时，复合材料将退化为“纤维束”，这时可采用纤维束统计理论来估算其强度

$$\sigma_c = (\alpha\beta eL)^{-1/\beta}(V_f + E_m V_m/E_f) \tag{4.120}$$

其中的 e 为自然对数的基底。图 4.14 示出了 $L=0.1m$ 时由上式求得的复合材料的强度值，这些结果明显低于 $\tau_s\neq0$ 的强度值。当 $\bar{\tau}_s$ 较大时，纤维应力集中变大，但无效长度变小，应力集中的增加同样导致受过应力的纤维的破坏概率增加，使复合材料的强度减小。因此，只有当纤维、基体及界面性能达到匹配，且界面剪切强度为

最佳值时，复合材料才具有最高的拉伸强度。

采用随机临界核理论对具有纤维/基体界面损伤的单向复合材料的纵向拉伸破坏行为进行细观统计分析，可以揭示界面的增强机制和复合材料的细观破坏机制，获得界面剪切强度与复合材料拉伸强度的定量关系，可为复合材料细观结构的优化设计提供重要的理论依据。结果表明，单向复合材料的纵向拉伸强度不仅取决于纤维和基体性能，而且取决于界面的黏结特性。因此，界面性能是影响复合材料强度的一种重要因素。发展新的纤维表面处理技术和树脂体系，使组分和界面性能得到最佳匹配，是提高复合材料力学性能很有潜力的途径，值得重视和进行深入研究。

## 思 考 题

4.1 在应用复合材料纵向拉伸强度的混合律式(4.5)时，其前提条件是什么？如不满足此前提条件，应如何处理？

4.2 试由式(4.27)和$\frac{\delta}{2}=\int_0^{\infty}\left(1-\frac{\sigma_f}{\sigma_c}\right)\mathrm{d}x$确定式(4.33)。

4.3 链式统计模型有何优缺点？

4.4 试按式(4.45)的推导方法，求出$P(A_6)$的具体表达式。

4.5 试按式(4.83)的推导方法，求出$d_4$。

4.6 试指出随机扩大临界核统计模型的优缺点。

# 第五章　正交叠层板的强度与破坏

正交叠层结构是用单层板铺叠成的最简单的叠层形式，这种简单的几何构型使涉及叠层强度的基本问题容易了解，它为研究受拉伸荷载作用的叠层板的基体开裂提供了一种模型系统。本章从确定性和统计的观点讨论了正交叠层板在拉伸荷载作用下的横向基体开裂、裂纹饱和及最后破坏等问题。

## 5.1　单向复合材料多级破坏期间的能量吸收

在第四章中，讨论了受纤维和基体材料的最终破坏应变以及纤维体积分数影响的单向复合材料的断裂模式。Aveston 等(1971)首次研究了复合材料破坏过程中的能量吸收。根据纤维或基体的塑性变形、使纤维/基体界面结合产生破坏所做的功及从基体中拔出纤维以抵抗摩擦力所做的功，可以推导出单级断裂期间对**断裂表面能**的贡献。他们发现**断裂功**随纤维直径及纤维/基体界面强度的增加而增加。

纤维的**多级破坏**通常发生在低纤维体积分数的塑性基体复合材料中。另一方面，作为施加拉伸荷载或从应力消除温度使之冷却而引起的热应力的结果，基体的多级破坏发生在高纤维体积分数的脆性基体复合材料中。下面将介绍关于承受轴向拉伸荷载作用的单层板中的多级基体裂纹扩展的能量关系。

考虑在固定荷载的条件下，当应变为 $\varepsilon_{mu}$ 时，垂直于纤维方向的一条基体裂纹的形成。假定基体中的应力等于基体破坏应力，以及在试样和加载系统的结合能(combined energy)中有减小。在某个固定荷载作用下，由于一条裂纹的形成所引起的能量变化包括：$\Delta W$＝复合材料每单位面积施加荷载所做的功，$\gamma_{db}$＝脱胶纤维每单位面积所吸收的能量，$U_s$＝复合材料每单位面积抵抗纤维与基体之间的摩擦力所做的功，$\Delta U_m$＝由于基体的应变松弛而损失的弹性应变能，$\Delta U_f$＝复合材料每单位面积纤维应变能的增量。若形成一条基体裂纹的表面能是 $\gamma_m$，只要

$$2\gamma_m(1-V_f)+\gamma_{db}+U_s+\Delta U_f \leqslant \Delta W+\Delta U_m \tag{5.1}$$

则裂纹形成。在这样的假定下，即由于裂纹的形成，基体和纤维中应力(应变)的改变随裂纹表面距离线性变化，Aveston 等计算了式(5.1)中的各项。通过进一步假定纤维和基体之间为纯摩擦黏结，就可从式(5.1)中导出基体破坏应变的表达式

$$\varepsilon_{mu}=\sqrt[3]{\frac{12\tau_s\gamma_m E_f V_f^2}{E_c E_m^2 r_f(1-V_f)}} \tag{5.2}$$

上式表明，通过适当控制纤维和基体的弹性模量($E_f$，$E_m$)、纤维体积分数 $V_f$、纤维半径 $r_f$、基体表面能 $\gamma_m$ 及纤维/基体界面剪切强度 $\tau_s$，可以提高横向基体开裂时复合材料的应变。

Budiansky 等(1986)将上述结果进行了推广，研究了无黏结、受摩擦约束滑移的纤维，这些纤维起初在基体中受热应变配合不当或其他应变配合不当所约束。他们也考虑了基体开裂之初的其他情形，这一情形涉及起初与基体是弱黏结的纤维，但受原先基体裂纹尖端附近应力作用而发生脱胶。McCartney(1987)对单向纤维增强复合材料中脆性基体开裂的连续统模型使用能量平衡计算，进一步证实了 Griffith 的关于基体开裂的破坏准则是正确的。

## 5.2 正交叠层板的横向开裂

在许多材料系统中，例如，玻璃纤维增强陶瓷和聚氯乙烯或玻璃纤维增强石膏等，可以观察到这些单向复合材料基体中的**多级横向裂纹**，因为此类复合材料中纤维的破坏应变比基体的破坏应变大得多。与此类似，复合材料正交叠层板在轴向拉伸荷载作用下，其破坏通常始于 90°层中的**基体横向开裂**。基体横向裂纹的出现归咎于材料中原始微裂纹的存在。当外荷载增大到某值时，“最严重”的微裂纹率先扩展成基体横向裂纹，即**初始破坏**或**第一破坏**。随着外荷载的增大，其他一些微裂纹也相继扩展成横向裂纹，从而形成多级开裂状态。外载荷的不断增大，使得裂纹间距不断减小，直至达到某一最小值。此时，在 90°层中便形成等间距的饱和裂纹群。有关这种行为的实验观察和分析模型已有许多文献报道，现有的理论研究主要由约束开裂的概念并采用剪滞方法、统计分析等来阐明这一现象，也可基于断裂力学中的裂纹扩展的**能量释放率**进行分析。下面首先介绍 1977～1981 年 Garrett、Bailey 和 Parvizi 等的实验研究和确定性理论。

### 5.2.1 正交叠层板的横向开裂现象

图 5.1 示出了[0/90/0]正交叠层板的构造。表 5.1 给出了玻璃/环氧和碳/环氧系统中单向层板的力学性能。玻璃/环氧 0°拉伸实验曲线直到断裂时基本上是线弹性的，但其 90°试样的拉伸曲线在应变约为 0.3%时却显示有明显的弯折(knee)，当应变大于 0.3%后，可以观察到“发白”效应(whitening effect)。0°碳/环氧拉伸实验曲线直到断裂时是弹性的，但它们是非线性的，其模量随应变的增加而增加。90°碳/环氧的拉伸曲线直到断裂时是线性的，破坏前均无弯折或声发射输出。由于在基体中的应力集中，两种材料系统的 90°试样的破坏应变均特别低。

当施加拉伸荷载增加时，在正交叠层板中 90°层的中央将出现首条裂纹，此裂纹垂直于施加荷载方向、平行于该 90°层中的纤维。两种叠层的破坏次序遵从类似的模式。在玻璃/环氧的应力-应变曲线上，出现两个弯折，对应 0.3%应变的第一

表 5.1　单向叠层板的力学性能*

| 性能 | 0°CFRP | 0°GRP | 90°CFRP | 90°GRP |
|---|---|---|---|---|
| 低应变杨氏模量/GPa | 127 | 42 | 8.3 | 14 |
| 断裂应力(强度)/GPa | 1.7 | 2.92 | 0.039 | 0.056 |
| 破坏应变/% | 1.2 | 2.2 | 0.48 | 0.50 |
| 泊松比 | 0.29 | 0.27 | 0.02 | 0.09 |

* CFRP 为碳纤维增强塑料;GRP 为玻璃纤维增强塑料。

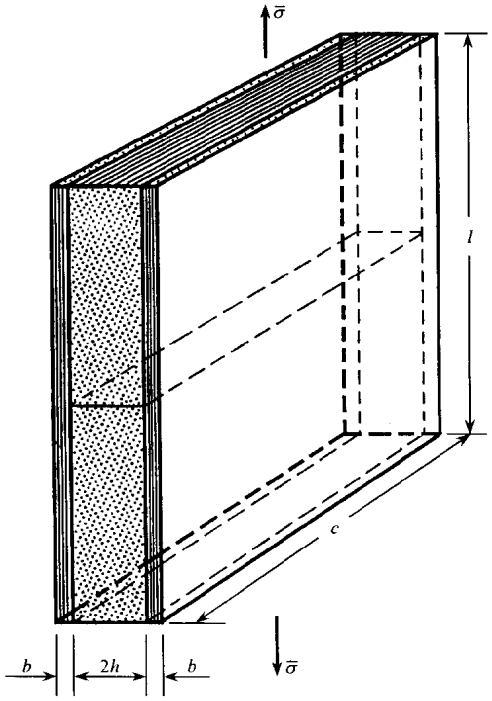



图 5.1　[0/90/0]正交叠层试样示意图

个弯折,与基体发白效应有关,对应 0.5%应变的第二个弯折,与横向基体开裂有关,但在碳/环氧叠层板中,这个现象并不明显。进一步的拉伸将形成更多的裂纹,这样发展下去,试样的标距部分便形成**等间距的饱和裂纹群**。出现首条裂纹时的应变随 90°层厚度($2h$)的减小而增加,同时,裂纹间距相应减小。在最薄的横向层的情形中,在试样破坏之前,完全观察不到横向裂纹。用显微镜可以观察到,破坏的最早期迹象是纤维/基体界面或纤维/基体界面附近脱胶,即使应变远小于在玻璃/环氧系统中观察到基体变白时的应变,这些破坏也发生。下一阶段是许多脱胶的接合形成某一细观裂纹,当其达到某临界尺寸(约为纤维直径的 3～4 倍)时,便迅速扩展。

当应变位于 90°层横向开裂应变与最终破坏应变之间时,可以观察到 0°层发

生纵向开裂。纵向开裂是由于 0°层和 90°层的泊松比和热膨胀系数的配合不当所造成的。纵向开裂发生时的应变随 0°层厚度的减小而增加。在碳/环氧正交叠层板中，未观察到纵向开裂现象。

### 5.2.2 横向裂纹间距

当单向复合材料在横向承受应力时，Kies(1962)首次解释了低应变破坏行为，并估计了基体中的应变放大。在极限情形中，当纤维几乎是互相接触时，应变放大因子近似等于 $E_f/E_m$ 值。应该指出，即使单层板的纤维体积分数较低，也不可避免地存在纤维几乎是互相接触的区域。玻璃纤维几乎是各向同性的，而碳纤维的横向杨氏模量却比其纵向模量小得多，它是用来计算应变放大因子的模量。第一条基体裂纹通常在沿垂直于加载轴方向互相接触或几乎接触的纤维之间形成。

裂纹密度(或裂纹间距)与叠层的几何形状有关，这些可由图 5.1 所示的正交叠层板来解释。当应变已经达到 90°层板的破坏应变 $\varepsilon_{tu}$ 时，在横向板中出现第一条裂纹，此时，0°层板承受附加的应力为 $\Delta\sigma$。从类似于第二章给出的剪滞分析中，可得

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma_0 \exp(-\sqrt{\phi}\, y) \tag{5.3}$$

其中

$$\phi = \frac{E_c G_{12}}{E_{11} E_{22}} \left( \frac{b+h}{bh^2} \right) \tag{5.4}$$

式中，$E_c$ 为叠层板沿 $y$ 方向的杨氏模量；$E_{11}$ 和 $E_{22}$ 分别为单向板沿纤维方向和垂直于纤维方向的杨氏模量；$G_{12}$ 为单向板的切变模量。在裂纹($y=0$)邻近的 0°层板的附加应力具有最大值 $\Delta\sigma_0$，当部分荷载通过**层间切应力** $\tau_i$ 回传到横向板时，$\Delta\sigma$ 随 $y$ 的增加而减小。由微段 $dy$ 的力平衡条件，得

$$\tau_i = -b \frac{d(\Delta\sigma)}{dy} \tag{5.5}$$

横向板的拉伸荷载在裂纹面处为零，但通过 0°层板的剪切传递逐渐增大。在某一给定的距离 $y$ 处，中间横向板的拉伸荷载 $F$ 由下式给出

$$F = \int_0^y 2c\tau_i dy \tag{5.6a}$$

式中，$c$ 是 90°层板沿纤维方向的宽度。设 $\sigma_{tu}$ 为正交叠层板中 90°层板的最终就位拉伸强度(此 $\sigma_{tu}$ 可能有别于单向板单独拉伸实验的横向拉伸强度)，当由 90°层板所担负的荷载等于 $2ch\sigma_{tu}$ 时，横向板将出现第一条裂纹。这个荷载转移到 0°层板中去，当横向板再被加载至 $2ch\sigma_{tu}$，另一条顺纤维的裂纹形成。第一条裂纹出现后，如果作用在叠层板上的施加应力保持为 $\bar{\sigma}=E_c\varepsilon_{tu}$，则除无穷远处外，横向板将不能承载至该值($2ch\sigma_{tu}$)，而 $\Delta\sigma_0=\sigma_{tu}h/b$。对于另一条裂纹的产生，$\bar{\sigma}$(施加应力)及由此产生的 $\Delta\sigma_0$ 必须增大到使 $F=2ch\sigma_{tu}$。

如果假定第一条裂纹发生在长为 $l$ 的试样中间($y=0$),那么,将有下述破坏次序。

1)当 $\bar{\sigma}=E_c\varepsilon_{tu}$ 时,在试样中部出现第一条横向裂纹,此时

$$F = 2bc\Delta\sigma_0[1 - \exp(-\sqrt{\phi}\, y)] \tag{5.6b}$$

2)当施加荷载增大到使

$$\Delta\sigma_0 = \sigma_{tu}\frac{h}{b}[1 - \exp(-\sqrt{\phi}\, l/2)]^{-1} \tag{5.7}$$

时,在试样的端部同时出现第二和第三条裂纹,裂纹间距是 $l/2$。

3)其后,在当前每两条裂纹之间的中部将出现另两条基体裂纹。两条原有裂纹之间的总切应力是

$$\tau_i = b\Delta\sigma_0\sqrt{\phi}\{\exp(-\sqrt{\phi}\, y) - \exp[\sqrt{\phi}\,(y - l/2)]\} \tag{5.8}$$

将上式代入式(5.6a),得

$$F = \int_0^{l/2} 2c\tau_i dy = 2bc\Delta\sigma_0[1 + \exp(-\sqrt{\phi}\, l/2) - 2\exp(-\sqrt{\phi}\, l/4)] \tag{5.9}$$

当裂纹出现在间距为 $l/4$ 处时,$\Delta\sigma_0$ 之值是

$$\Delta\sigma_0 = \sigma_{tu}\frac{h}{b}[1 + \exp(-\sqrt{\phi}\, l/2) - 2\exp(-\sqrt{\phi}\, l/4)]^{-1} \tag{5.10}$$

4) 对于裂纹间距是 $l/8$,有

$$\Delta\sigma_0 = \sigma_{tu}\frac{h}{b}[1 + \exp(-\sqrt{\phi}\, l/4) - 2\exp(-\sqrt{\phi}\, l/8)]^{-1} \tag{5.11}$$

这种破坏次序一直持续下去,直到 0°层板发生破坏或相邻裂纹之间的间距很小,以致在 90°层板中的正应力不能再逐渐增大到 $\sigma_{tu}$ 为止。

### 5.2.3 横向裂纹约束

当正交叠层中的横向层较薄时,使横向基体开裂所需的应变是较大的,在某些情形下,横向基体开裂直到 0°层板发生灾难性破坏时均完全受到约束。这种约束开裂的现象归咎于这样的事实,形成某条裂纹必须在力学上是可能的和在能量上是容许的。正如在 5.2.2 中所讨论的那样,对于正交叠层板,按照应变放大的观点,前者的要求是满足的。层板厚度对 90°层破坏应变的影响可以根据能量的观点来理解。

对于某一受恒定荷载作用的试样,如果下列条件

$$\Delta W > \Delta U - U_D + 2\gamma A \tag{5.12}$$

被满足,则某一裂纹开始形成。式中:$\Delta W$ 为试样的每单位面积施加应力所做的功;$\Delta U$ 为试样的每单位面积所存储的应变能增量;$U_D$ 为每单位面积的能量损失,它是由于存在任意的消耗过程(如脱胶纤维与基体之间的滑动摩擦)所产生的;$\gamma$ 为每单位断裂表面积的断裂表面能;$A$ 为断裂表面积。已经发现,对于实用的板厚度,

在横向板开裂期间，0°层板与 90°层板之间的界面保持黏结，整个叠层板表现为完全弹性。这样，式(5.12)成为

$$\Delta W > \Delta U + 2\frac{h}{h+b}\gamma_t \tag{5.13}$$

式中，$\gamma_t$ 是横向层板平行于纤维方向的断裂表面能。因为施加应力所做功的一半被存储为试样的弹性应变能，所以它遵从下式

$$\frac{1}{2}\Delta W > 2\frac{h}{h+b}\gamma_t \tag{5.14}$$

当横向板在应变 $\varepsilon_{tu}$ 下出现第一条裂纹时，附加应力 $\Delta\sigma$(式(5.3))被施加到其外侧的层板上，此时，叠层板沿施加荷载方向的伸长量(变形)$\Delta a$ 可由下式求出

$$\Delta a = \int_0^{l/2} \frac{\Delta\sigma}{E_{11}} \mathrm{d}y \tag{5.15}$$

对于 $l/h \gg 1$ 的情形，上式变成

$$\Delta a = \frac{2hE_{22}\varepsilon_{tu}}{bE_{11}\sqrt{\phi}} \tag{5.16}$$

施加应力 $\bar{\sigma}$ 在第一条横向裂纹的应变时所做的功是

$$\Delta W = \Delta a\bar{\sigma} \tag{5.17}$$

因此

$$\Delta W = \frac{2hE_cE_{22}\varepsilon_{tu}^2}{bE_{11}\sqrt{\phi}} \tag{5.18}$$

将上式代入式(5.14)，可求出横向破坏应变的最小值是

$$(\varepsilon_{tu})_{min} = (\varepsilon_c)_{min} = \sqrt{\frac{2bE_{11}\gamma_t\sqrt{\phi}}{(h+b)E_{22}E_c}} \tag{5.19}$$

以横向板的半厚度 $h$ 为自变量，由上式可以求出相应的最小开裂应变 $(\varepsilon_c)_{min}$ 的理论值。将这些估计值与玻璃/环氧正交叠层板的实验结果进行比较(见图 5.2)，从中可以观察到，在 $h<0.25$mm 的范围内，理论值与实验结果较为接近。可是，对于横向层较厚($h>0.25$mm)的叠层板，这种理论却不适用(理论值与实验结果相差太大!)，其开裂均在应变约为 0.5%时发生，这一应变接近于单向 90°层板的开裂应变。

根据 Bader 等(1979)的研究，当应变不超过最终破坏应变的 30%时，在玻璃和碳纤维增强塑料叠层板的 90°层中的细观裂纹通常就开始扩展。这样，设计者们面临一个窘境：是把设计基于比开裂门槛值(玻璃纤维增强塑料，典型值为 0.5%)低的应变，还是基于最终破坏应变(1.5%或更高)？虽然细观裂纹对叠层板的短期力学性能可能影响不大，但是，在周期荷载作用下及恶劣环境下，这些细观裂纹将在局部造成进一步破坏时起核心的作用。实验证据建议，用较薄的个别层板来构造的叠层板，能够抑制或阻止横向开裂和纵向劈裂。

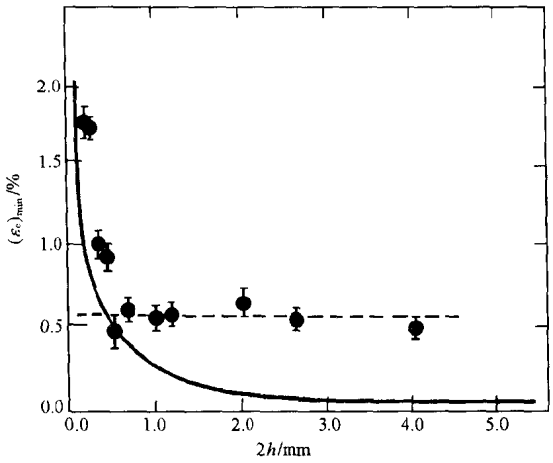



图 5.2　在各种 $h$ 下 $(\varepsilon_c)_{min}$ 的理论与实验结果的比较

—表示式(5.19)，●表示实验

## 5.3　横向开裂的统计分析

Garrett 等的确定性多级开裂理论试图计及在[0/90/0]玻璃纤维/树脂基叠层板中裂纹间距的有规律的分布。Manders 等(1983)提出了一种拟合实验数据和估计强度对尺寸的一种依赖关系的统计模型。下面，在对实验所作的观察进行描述后，将讨论强度的这种变化性的起因和暗指的含义。

Manders 等的[0/90/0]三层叠层板是由 Silenka E-玻璃纤维和 Epikote 环氧树脂组成，中间 90°层板为 1.1 mm 厚，并夹在两块各为 0.55 mm 厚的 0°板之间。纤维和基体折射率之间的近似匹配使叠层板实际上变成透明的，以致能够直接观察到 90°层中的开裂和细观损伤。使用明场照明或者黑场照明，对每个规则的施加荷载间隔，用照相机拍下相应的破坏模式。黑场照明显示纤维/基体脱胶(使光线分散的“应力变白”)，其反差良好；而黑场照明则给出较好的裂纹清晰度，在这个情形中，纤维/基体脱胶看来好像是黑的，其反差也较差。从 150℃的后固化温度冷却至室温所导致的 90°层的热残余拉伸应变估计约为 0.22%。

当试样受载时，随着荷载的增加，初始的变白逐步增加，应变约为 0.34%时最显著。在图 5.3 的应力-应变曲线中，应变约为 0.1%时可见到一个小弯折(knee)，这一现象归因于纤维/基体脱胶的开始。应变约为 0.4%时，裂纹瞬间出现，通常出现在较显著的变白带中。由这一观察可以得出结论，由纤维/基体脱胶的串接形成一条裂纹。应力-应变曲线中的第二个弯折反映了多级开裂的开始。在整个加载过程中，裂纹形成率随施加应变减小。应变愈高，裂纹间距愈均匀。当应变约为 0.7%时，在 0°层板中也出现应力变白，当应变约为 1.8%时，在 0°层板中出现纵向裂纹。

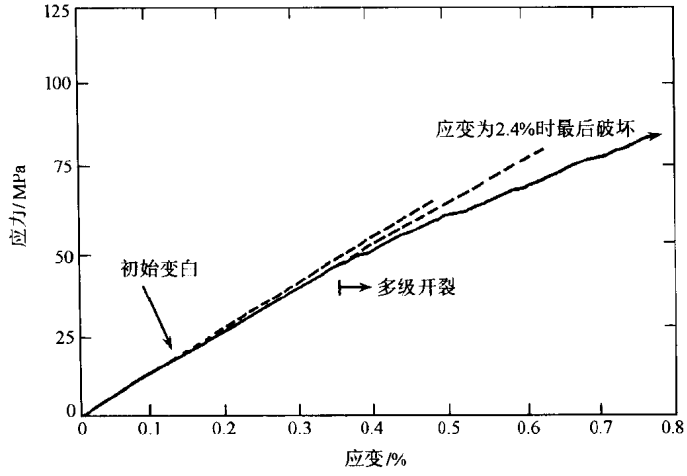



图 5.3 [0/90/0]E-玻璃/环氧三层叠层板的应力-应变曲线

Manders 等使用便携式显微镜测量了照片中的每条裂纹的位置，并计算了每一荷载下的裂纹之间的间距和它们的累积分布函数。这些分布说明了应变愈高间距愈密的整个趋势。在裂纹间距随应力而变化的研究中，Manders 等假定，90°层是具有某种固有强度分布的一种理想的均匀脆性材料，这种固有强度分布可以用单位体积破坏的累积分布函数 $S_0$ 来描述。同时也期望 90°层的强度(在其整个体积中是统计相同的，即组成实质上是大于细观结构的体积)应该具有互相独立的和同样分布的强度。

这样，体积为 $V$ 的强度累积分布函数 $S_V$ 可以写成

$$1 - S_V = (1 - S_0)^V \tag{5.20}$$

然后，由韦布尔提出的“破坏风险率”$R_V$ 由下式给出

$$\ln(1 - S_V) = V\ln(1 - S_0) = - R_V \tag{5.21}$$

令

$$\ln(1 - S_0) = - \phi(\sigma) \tag{5.22}$$

则体积元素 $\mathrm{d}V$ 的破坏风险率 $\mathrm{d}R$ 是

$$\mathrm{d}R = - \ln(1 - S_0)\mathrm{d}V = \phi(\sigma)\mathrm{d}V \tag{5.23}$$

对于非均匀应力状态

$$R_V = \int_V \mathrm{d}R = \int_V \phi(\sigma)\mathrm{d}V \tag{5.24}$$

和

$$S_V = 1 - \exp(- R_V) = 1 - \exp\left[- \int_V \phi(\sigma)\mathrm{d}V\right] \tag{5.25}$$

假定应力在横截面面积 $A$ 中是均匀分布的，则体积积分可以由沿长度 $l$ 的积分来替代。因此，式(5.21)成为

$$\ln(1-S_V) \cong -A\phi(\sigma)l \tag{5.26}$$

当绘出 $\ln(1-S_0)$-$l$ 图时，量 $A\phi$ 从其斜率中找出。

Manders 等对 90°层的强度采用两参数韦布尔分布，其中

$$A\phi = A(\sigma/\sigma_0)^{\beta} = A(\varepsilon/\varepsilon_0)^{\beta} \tag{5.27}$$

$\sigma_0$ 和 $\varepsilon_0$ 分别是关于应力和应变的尺度参数，$\beta$ 为形状参数。式(5.27)取对数，有

$$\ln(A\phi) = \beta\ln\varepsilon - \beta\ln\varepsilon_0 + \ln A \tag{5.28}$$

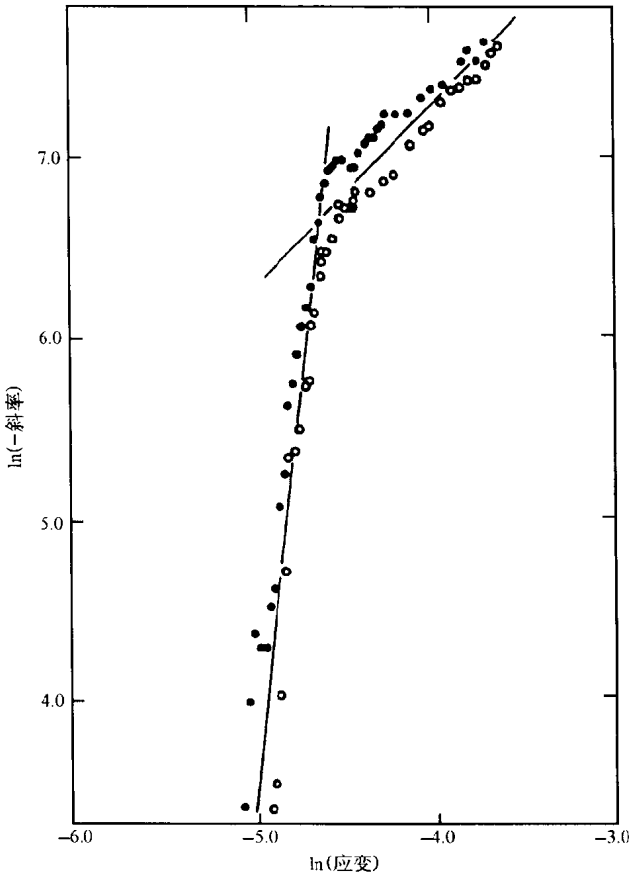



图 5.4　斜率与横向板应变的关系(已对热残余应变进行了修正)
实心圆和空心圆相应于两种极为相同的试样

从上式可以看到，如果韦布尔分布是正确的，那么，根据 $\ln(1-S_0)$-$l$ 图及施加应变获得斜率的图是具有斜率为 $\beta$ 的直线，这一结果示于图 5.4 中。图中显示，两直线区域在应变约为 0.4%(对热残余应变的矫正)或施加应变为 0.6%处交叉；对应于低应变和高应变的 $\beta$ 值分别为 8.5 和 1.0；两直线段的两个截距($\ln A-\beta\ln\varepsilon_0$)为 47 和 11。

最后，将 $\beta$=8.5 和截距=47 代入式(5.28)，再由式(5.26)算出作为应变函数

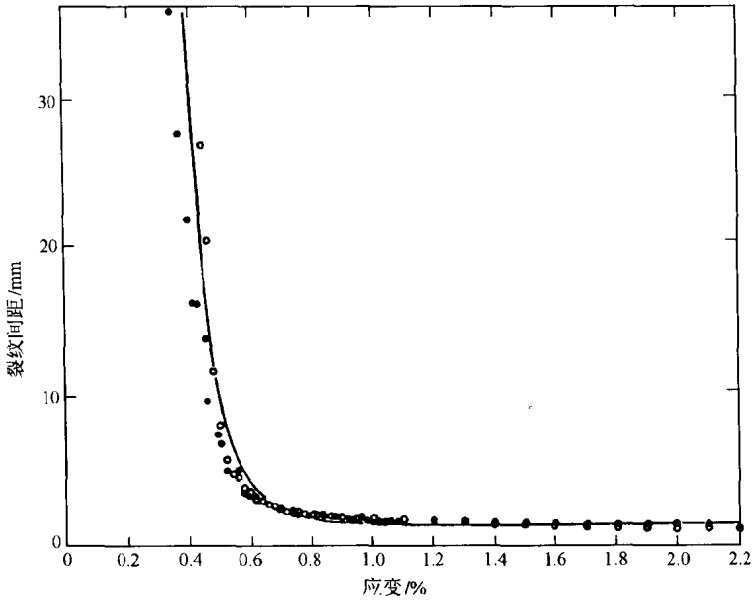



图 5.5　裂纹间距与应变的关系

细实线为基于统计模型的估计

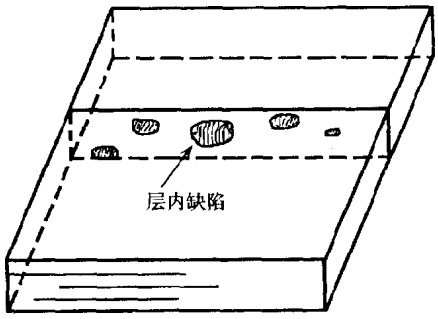
的平均裂纹间距($S_V=0.5$),理论相互关系的结果用细实曲线示于图 5.5 中。

Manders 等认为 Garrett 等的确定性模型与统计模型是相互补充的。裂纹间距在低应变处是较大的,对增大 90°层中某一裂纹任一边的应力所需的长度是较小的。因此,裂纹之间的大部分区域相当均匀地承受应力,新裂纹的位置由基体中的缺陷分布所确定;新裂纹极少在两条原有裂纹之间的正中央形成。所以,裂纹间距的分布比 Garrett 等估计的两种因素包含一个更宽的范围。当应变较高时,情况正好相反,两条原有裂纹之间的区域非均匀地承受应力。因为在两条原有裂纹之间正中央处的应力最大,所以,正如确定性模型所描述的那样,这是新裂纹形成的地方。当裂纹间距比"不受应力长度"(unstressed length)(近似等于 90°层厚度)大得多时,统计模型是适用的;当它是相似的量值,则确定性模型将更适用。

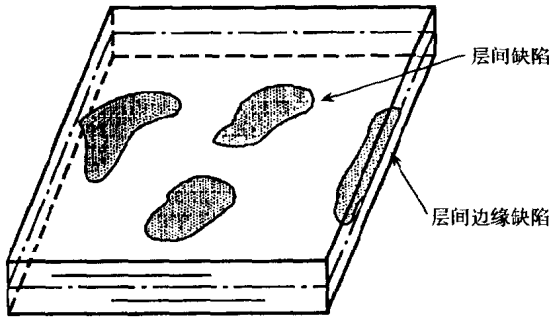
## 5.4　横向开裂和蒙特卡罗模拟

在拉伸荷载作用下,正交叠层板中横向开裂的发生,可以认为是由于存在随机分布缺陷的一种随机过程。正如 4.3.5 中讨论的那样,随机过程可以用蒙特卡罗步骤来模拟。在这种情形中,假定在单向板中随机地存在有位于板厚度方向并平行于纤维的**层内缺陷**(图 5.6(a))。当正交叠层板中横向板承受拉伸荷载时,这些缺陷引起可以观察到的横向开裂。为了模拟的目的,层内缺陷的特征用随机产生的**有效缺陷**来表示。当然,有效缺陷不是真正的缺陷,可是,如果能适当地选取有效缺陷,

那么，它们将代表板系统的一种固有性能，可以产生模拟模型中横向开裂的基本特性。




(a) 有效层内缺陷示意图




(b) 有效层间缺陷示意图

图 5.6

Wang 和 Crossman(1980)首次进行了能量分析，基于经典的断裂力学概念，结合有效缺陷的假定，估计了单一的横向开裂的起始。他们的分析被一系列的实验所证实。后来，Wang、Chou 和 Lei(1984)及 Wang(1984,1987)把能量方法引到蒙特卡罗步骤中，模拟了多级开裂的随机性质。下面，将较详细地讨论 Wang 等的工作。

1. 弹性板和三维应力状态

首先简要叙述一下能量法的基础知识。在弹性板理论及经典的断裂力学范围内，可以简明地推导出能量法。弹性板理论把每一单向板看为是三维的、弹性的、均匀的和各向异性的固体，而叠层板则被模型化为一种含有缺陷的分层媒质。单独的有效缺陷被处理成一个小裂纹，因此缺陷周围的弹性应力场几乎总是三维的。然而，在某些简化的假定下，一些三维场可以化为一般的平面应变场。尽管那样，通常仍需采用数值技术求解。

2. 有效的缺陷分布

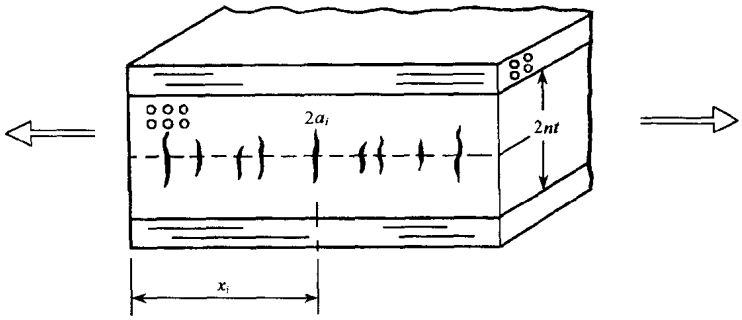
在纤维/基体尺度下进行研究横向开裂的确切机制是相当复杂的，通常假定基

体开裂是由 90°板中平行于纤维方向的材料细观缺陷的互相串接而产生的。可是，在板的尺度下进行研究，横向开裂则表示横向板沿纤维/基体界面的一种分离。为了在板尺度下便于对事件进行数学描述，尚需引进**有效缺陷**的概念。假定在每一块单向板中，存在一个有效缺陷尺寸的**特征概率密度分布**(见图 5.7)，缺陷的长度用 $2a$ 表示，其位置用 $x$ 表示。于是，离散的随机变量$\{a_i, i=1,2,\cdots,M\}$和$\{x_i, i=1,2,\cdots,M\}$就表示缺陷的尺寸和位置分布的特性。当两层板或更多的板铺叠在一起(例如在$[0/90_n/0]$叠层板中，其中 $n>1$)时，在多层 90°板中的缺陷尺寸分布用**容积法则**(volumetric rule)可表示为

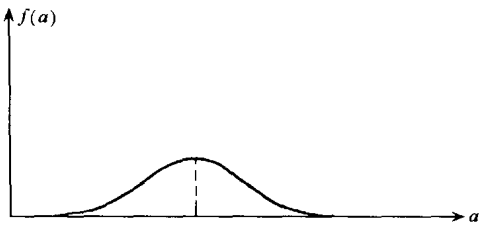
$$a_{i,n} = a_i(n)^{2/\lambda}, \quad i = 1,2,\cdots,M \tag{5.29}$$

式中，$\lambda$ 是与$\{a_i\}$的分布特征有关的常数。为了简便，假定 $n$ 层 90°板中的缺陷位置分布保持不变

$$x_{i,n} = x_i, \quad i = 1,2,\cdots,M \tag{5.30}$$




(a) 层内缺陷的尺寸$2a_i$和位置$x_i$的示意图




(b) 横向板中的有效层内缺陷尺寸的概率密度函数

图 5.7

3. 第一条横向裂纹的起始

现在用图 5.7 中的$[0/90_n/0]$叠层板来说明**能量法**。考虑叠层板受施加拉伸应变 $\varepsilon_c$ 和温度改变 $\Delta T$(温度降低时 $\Delta T$ 为正)两种因素作用。令缺陷分布由式(5.29)和式(5.30)来描述。有了已知的某一特殊缺陷的尺寸和位置，就可以进行弹性应力分析；把该缺陷看为一个小裂纹，也就可以计算裂纹尖端的应变能释放率 $G(a_{i,n}, \varepsilon_c, \Delta T)$。于是，决定这个小裂纹扩展成大横向裂纹的条件是

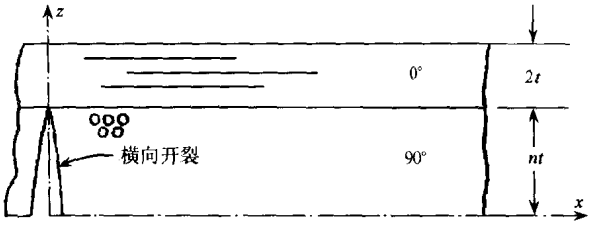
$$G(a_{i,n},\varepsilon_c,\Delta T)=G_{Ic} \tag{5.31}$$

式中，$G_{Ic}$是Ⅰ型基体裂纹扩展的材料断裂韧度(临界应变能释放率)。

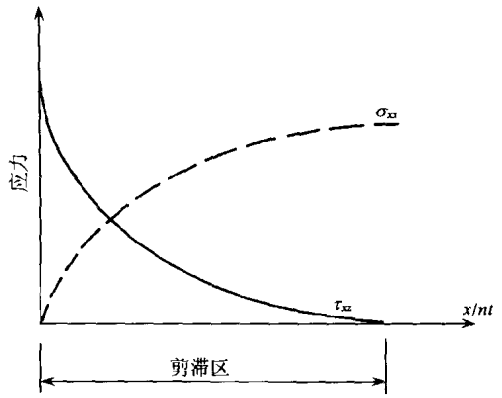
于是，对于形成第一条裂纹，假定该裂纹是由最大的$\{a_{i,n,i}=1,2,\cdots,M\}$(用$a_{max}$表示)引起的。第一条裂纹开始发生时的临界叠层应变$(\varepsilon_c)_{cr}$便由式(5.31)设置$a_{i,n}=a_{max}$来确定。

4. 剪滞效应

当第一条裂纹形成时，形式上存在于未断的90°层板中的局部拉应力$\sigma_{xx}$即为零。如果0/90界面的黏结足够强，在横向裂纹的附近便产生局部化的层间切应力$\tau_{xz}$(图5.8)，它离横向裂纹的一小段距离是成指数衰减的；在90°层板中的拉应力$\sigma_{xx}$在离横向裂纹的一小段距离后将恢复至其原有量。这种局部传递应力区或剪滞区(带)是与多层板的厚度$2nt$成正比例的。




(a) 正交叠层板的横向开裂




(b) 由横向开裂导致的局部应力传递和剪滞区

图5.8

当位于横向裂纹附近存在一个有效缺陷时(见图5.9)，该缺陷可能处在横向开裂的剪滞区中。剪滞作用的程度取决于相对间距$s/nt$，具体地说，如果这个缺陷的尺寸是$2a$，缺陷尖端处相关的应变能释放率是$G(a,\varepsilon_c,\Delta T,s)$，那么，对应变能释放率的剪滞效应便可由下式定义的相关因子(比值)$R(s)$来表达

$$R(s)=G(a,\varepsilon_c,\Delta T,s)/G(a,\varepsilon_c,\Delta T) \tag{5.32}$$

式中，$G(a,\varepsilon_c,\Delta T)$是无剪滞影响的应变能释放率。注意，在整个剪滞区域内，保持

因子 $R(s)$的变动范围是在 0 与 1 之间。当某一个缺陷位于两条连续的横向裂纹之间，它便是在两条裂纹的剪滞效应之内。相关的应变能释放率 $G^*$ 由下式给出

$$G^*(a,\varepsilon_c,\Delta T) = R(s_L)G(a,\varepsilon_c,\Delta T)R(s_R) \tag{5.33}$$

式中，$s_L$ 是从该缺陷到左侧裂纹的距离；$s_R$ 是从该缺陷到右侧裂纹的距离。

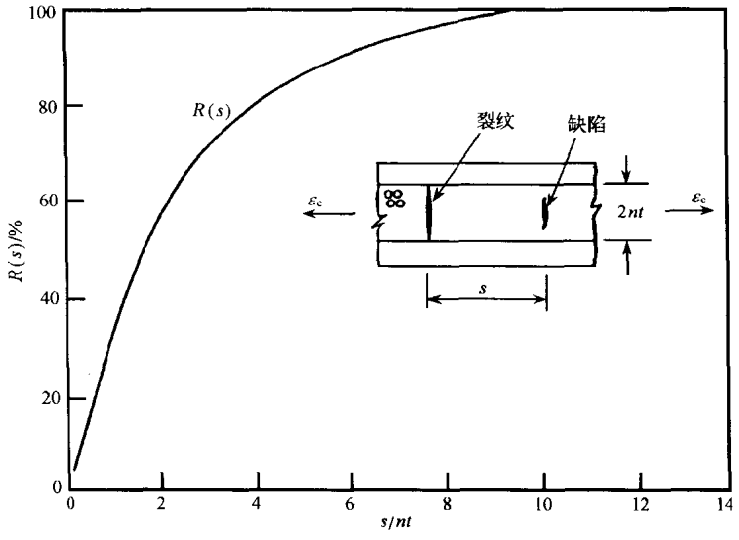



图 5.9　由剪滞效应产生的能量保持因子 $R(s)$与 $s/nt$ 的关系

5. *多级裂纹作为荷载的函数*

$\{a_{i,n}\}$中的最大的一个缺陷形成第一条裂纹以后，当叠层应变略微大于$(\varepsilon_c)_{cr}$时，从余留的缺陷中可以形成后继的裂纹。然后开始搜寻，以确定产生最大应变能释放率 $G^*$（关于由原有裂纹预测的剪滞效应）的第二个缺陷。相应于第二条裂纹的叠层施加应变（应该大于$(\varepsilon_c)_{cr}$）由式(5.31)中的 $G^*$ 来确定。

逐次搜寻其他最有可能形成横向开裂的缺陷，并且模拟横向裂纹的整个加载次序，直至不再可能产生任何更多的横向裂纹为止，或者直至在加载过程期间某些破坏模式（如脱层、纤维断裂等等）到来为止。

6. *有效缺陷分布的确定*

上述模拟过程的困难在于有效缺陷是假设量，也在于必须恰当地选择这些有效缺陷，以便产生横向开裂的基本特征。确定有效缺陷分布需要进行适当的实验。

在 Lei(1986)的工作中，通过测试$[0_2/90_2]_s$的拉伸试样，确定了 AS-3504-06 碳纤维/环氧单向板中的有效层内缺陷。在实验中，用 X 射线测定横向裂纹，它们作为叠层拉伸应力的函数进行记录。以叠层施加应力为横坐标，裂纹密度（试样的每单位长度的裂纹条数）为纵坐标，用 4 个试样进行试验所获得的数据绘出图 5.10，图中的阴影区（代表加载期间横向裂纹的累积形成）类似从某随机过程中输出的一种形状。

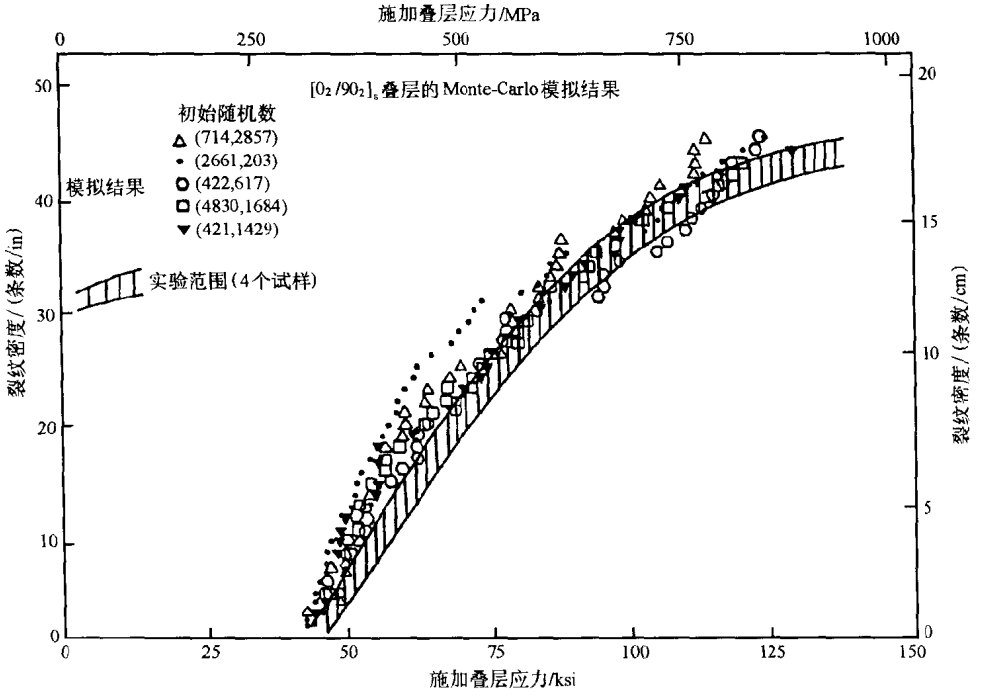



图 5.10　碳纤维/环氧$[0_2/90_2]_s$叠层板横向层的累积裂纹密度与施加叠层应力的关系

(1 in=2.54cm,1 ksi=$6.89\times10^6$Pa,下同)

注意到实验区域在应力刻度上具有确定的位置,在坐标平面中具有确定的曲率,在裂纹密度刻度上具有渐近值。这些特点现在将用来确定$[90]_4$层中的有效缺陷分布。为了做到这一点,使用随机数发生器来形成(0,1)区间中的一组($M$个)随机值。指定这$M$个值为$\{x_i\}$(沿$[90]_4$层单位长度的$M$个缺陷的位置)。假定$M$个缺陷$\{a_{i,4}\}$的尺寸符合某种韦布尔累积函数

$$F(a) = 1 - \exp[-(a/\alpha)^{\beta}] \tag{5.34}$$

在这里,假定参数$M$,$\alpha$和$\beta$是已知的,于是,在(0,1)区间中再产生新的一组($M$个)随机值,把这些值分配给$\{F_i\}$(相当于$a=a_{i,4}$时$F(a)$的值),由式(5.34)便可确定缺陷尺寸$\{a_{i,4}\}$。

有了假定的$M$,$\alpha$和$\beta$值,就可以进行如前所述的横向开裂过程的模拟了。$M$,$\alpha$和$\beta$的一种适当的选择是用图 5.10 中的实验数据带进行准确模拟的一种选择。通常,$\alpha$主要影响阴影区的曲率,$\beta$沿应力刻度改变阴影区,$M$确定在裂纹密度刻度上阴影区的渐近值。图 5.9 也示出了从 5 个模拟试样中获得的模拟裂纹密度对叠层应力的数据。恰当地选取$M$,$\alpha$和$\beta$值可以很好地符合实验数据带。

一旦选定$M$,$\alpha$和$\beta$值,由式(5.29)就可找到任意层数的 90°板中的有效缺陷尺寸分布,并且能够模拟该多层 90°板中的横向开裂。图 5.11 示出了 4 个$[0_2/90]_s$试样的模拟结果及实验数据带。图 5.12 示出了对 4 个$[0_2/90_4]_s$试样的实验与模

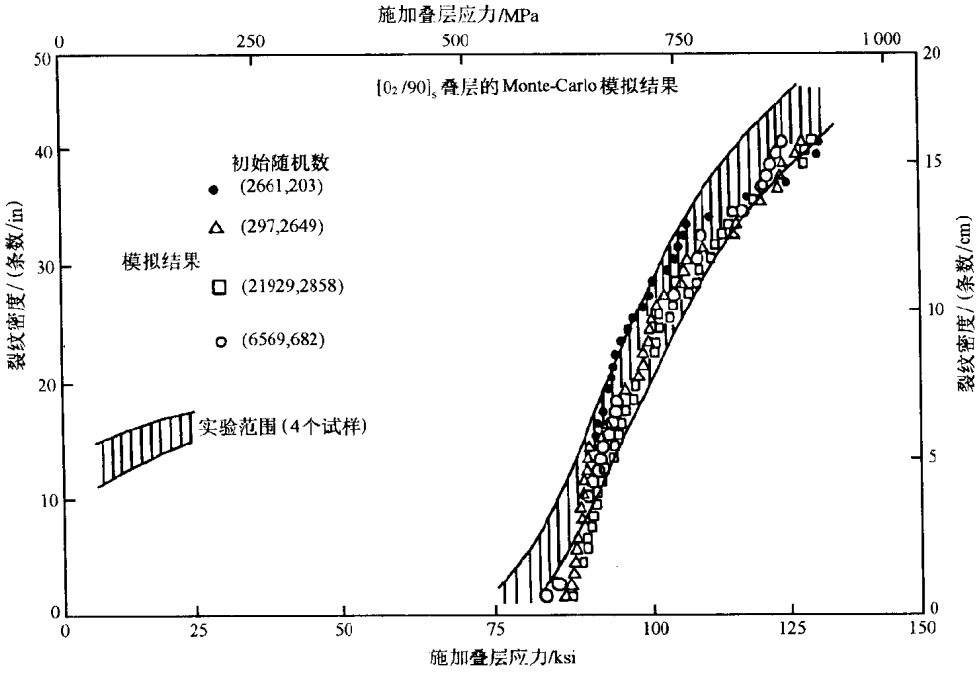



图 5.11　碳纤维/环氧$[0_2/90]_s$叠层板横向层的累积裂纹密度与施加叠层应力的关系

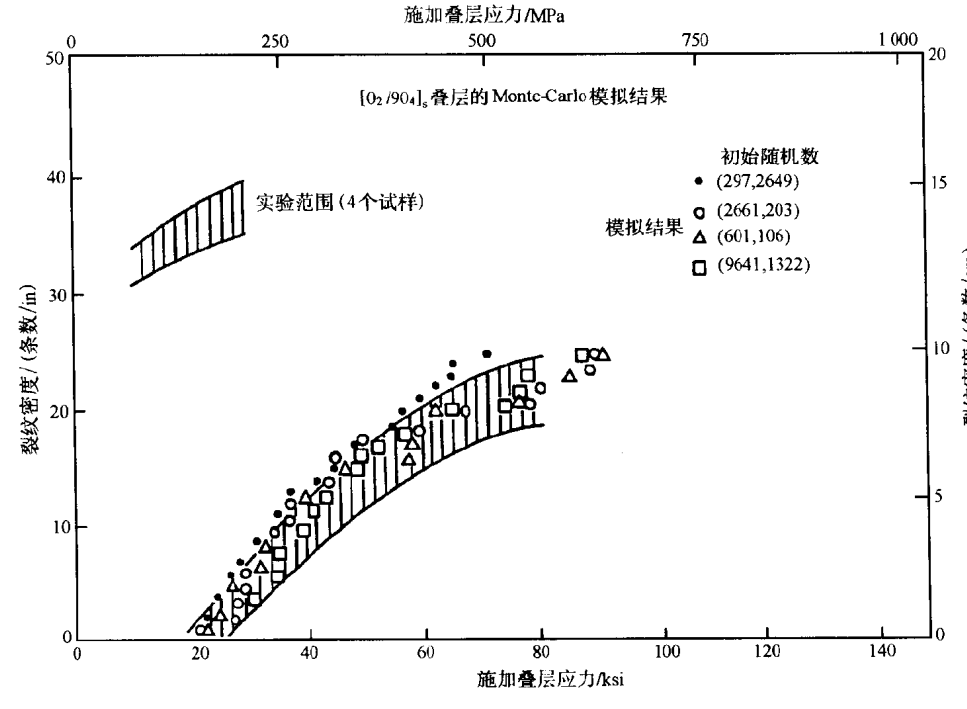



图 5.12　碳纤维/环氧$[0_2/90_4]_s$叠层板横向层的累积裂纹密度与施加叠层应力的关系

拟之间的类似比较。在图 5.11 和图 5.12 中，模拟数据均基于从$[0_2/90_2]_s$试样中连同式(5.29)一起找到的缺陷分布。

正如在 4.3.5 中提及的那样，蒙特卡罗方法依赖于输入随机变量的性质；在这一情形中，输入是假定缺陷的分布。在上述所讨论的例子中，可以证明由拟合实验数据确定的 $M$，$\alpha$ 和 $\beta$ 的值是不惟一的。然而，与断裂力学分析一起进行的模拟不仅对横向开裂的机制提供了定量描述，而且对横向开裂的统计特性也提供了一种估计方法。

## 5.5 多向叠层板中的脱层

脱层是多向叠层板、壳中的另一种破坏模式。在单层板的尺度下，脱层可以看为在两相邻层板界面中的平面裂纹扩展(见图 5.13)。这种破坏比较特殊，因为破坏平面并不垂直于拉伸方向，而是平行于拉伸方向，驱动力起源于垂直叠层平面的次应力(层间应力)。由于大多数叠层板是设计成传递面内荷载的，因此，除自由边、开孔、大缺陷附近及其他像板性能不匹配的局部相互影响产生应力集中这样的场所之外，叠层板中通常是无层间应力的。另一方面，这些局部应力场几乎总是三维的。

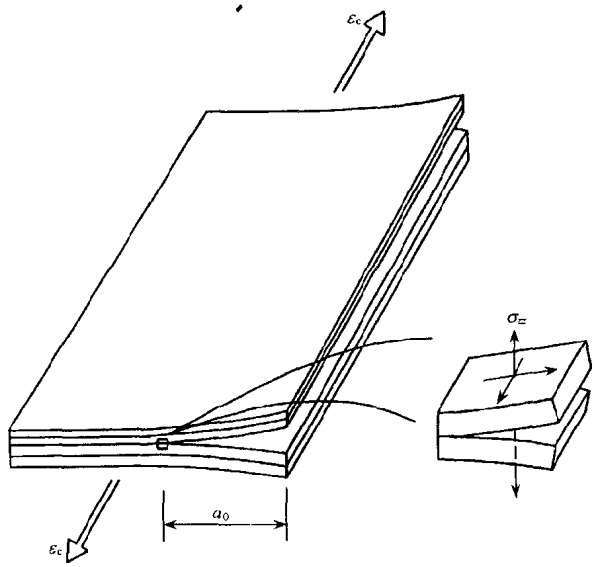



图 5.13 多向叠层板中的层间开裂(边缘脱层)

在 5.4 节中所讨论的三维应力分析和能量法可以用来描述脱层的起始和扩展。Wang 和 Crossman(1980)及 Crossman、Warren、Wang 等(1980)遵从这一途径，研究了受单向拉伸荷载作用的叠层板中的自由边脱层问题；Wang、Slomiana

和 Bucinell(1985)考虑了受压缩荷载作用的叠层板中的自由边脱层问题;Wang、Kishore 和 Li(1985)检验了互相影响的叠层缺陷附近的脱层。在这些情形中,均进行了实验相互关系的研究,证实了其分析的合理性和正确性。

为了简明起见,下面仅讨论受单向荷载作用的叠层板中的自由边脱层问题,并且仅给出分析方法的逻辑公式。

### 5.5.1 自由边脱层

自由边脱层问题作为科学挑战及其工程重要性已经引起人们极大的兴趣。早期的实验室试验已经表明,如果在加载过程中发生自由边脱层,则叠层拉伸强度将大幅度下降。对叠层压缩强度的类似影响也被进一步证实。脱层机制的进一步分析建立了深受板铺叠次序、板纤维方位、单层板厚度及叠层板宽度与厚度比影响的脱层的物理行为。

尽管已经有许多描述脱层增长的估计模型,Wang、Crossman 等(1980)发展的能量法,却计及了所有这些在自由边附近严重集中的三维应力场中起作用的内在和外在的因素。

为了说明这个方法,以图 5.13 所示的具有直边的对称叠层板为例。假定在施加叠层应变 $\varepsilon_{xx}$ 作用下的叠层板是在其界面层之一中引起自由边脱层这样的叠层板。问题便是确定哪个界面是最可能脱层、在什么荷载下脱层。

对于长的、对称铺叠的有限宽叠层板,可以假定叠层板应力场与加载轴 $x$ 无关。因此,该应力场就可由广义平面应变的弹性公式来描述。所引起的自由边脱层可沿叠层长度均匀地扩展,同时也从自由边向叠层板中心区域扩展,如图 5.13 所示。脱层裂纹可以考虑为具有线尺寸 $a_0$ 的、在界面层中扩展的自相似线裂纹。

1. *有效层间缺陷和扩展条件*

为了对脱层起始做出估计,这里将再次使用有效缺陷的假定。在这一情形中,假定在叠层板的每个界面层中均存在随机界面缺陷,如图 5.6(b)所示。特别地,沿着叠层板自由边,存在一个占优势的层间边缘缺陷。进一步假定该占优势的缺陷位于某一已知的界面中,并且在图 5.13 所描绘的意义下具有线尺寸 $a_0$。把这个缺陷看为脱层开裂的起始者,其尺寸 $a_0$ 仍然是个随机变量。这样,如果已知单向层的弹性常数、层板铺叠次序、层板方位及 $a_0$ 所属的界面层,就可以着手计算裂纹尖端的应变能释放率 $G(a_0,\varepsilon_c)$。

$G(a_0,\varepsilon_c)$作为 $a_0$ 的函数的一般特性示于图 5.14 中(对于某一给定的施加拉伸应力 $\bar{\sigma}$)。从图中可见,当 $a_0=0$ 时,$G=0$;随着 $a_0$ 的增加,$G$ 急剧地增加;当 $a_0$ 大于 $a_m$ 时,$G$ 达到一个渐近值 $G_{asy}$。必须指出,在图 5.14 中,$G_{asy}$的值仅随 $\varepsilon_c^2$ 升高。$a_m$ 的物理意义是,在这种尺寸下,脱层不再与自由边边界相互影响。通常,这种边界效应大致波及约半个叠层厚度的距离,远于这一距离,脱层问题仅仅涉及两个各向异性弹性媒介之间的裂纹扩展,边界效应消失。

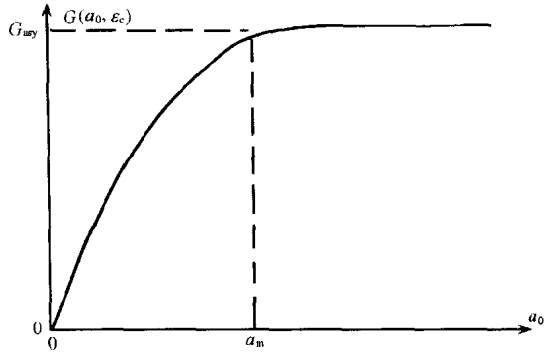



图 5.14　给定 $\varepsilon_c$ 值时的应变能释放率 $G$ 与脱层裂纹尺寸 $a_0$ 的变化趋势

可以用施加叠层应变 $\varepsilon_c$ 来确切地表达所计算的应变能释放率 $G$

$$G(a_0,\varepsilon_c) = C_e(a_0)2t\varepsilon_c^2 \tag{5.35}$$

式中，$C_e(a_0)$是脱层尺寸 $a_0$ 的单值函数；$2t$ 是单层板的厚度。

在 $G$ 的算式中，可以很容易地包括固化热残余应力的影响。如果叠层应力消除温度为 $T_0$，周围温度为 $T$，那么，叠层板便经受温差 $\Delta T=T_0-T$。计算的应变能释放率 $G$ 可以用 $\varepsilon_c$ 和 $\Delta T$ 来确切表达

$$G(a_0,\varepsilon_c,\Delta T) = [\sqrt{C_e(a_0)}\varepsilon_c + \sqrt{C_T(a_0)}\Delta T]^2 2t \tag{5.36}$$

式中，$C_T(a_0)$也是脱层尺寸 $a_0$ 的单值函数。

根据断裂力学，控制脱层起始的条件由下式给出

$$G(a_0,\varepsilon_c,\Delta T) = G_c \tag{5.37}$$

式中，$G_c$ 为在脱层之下的叠层板的断裂韧度。

当给定脱层的界面、$a_0$ 和 $G_c$ 值时，由式(5.37)就可以求出脱层开始时的临界叠层应变 $\varepsilon_c$，但这些值不易求出，故该问题尚需进一步分析。

2. 有效的边缘缺陷尺寸

给定图 5.14 中的 $G(a_0,\varepsilon_c)$的函数特性，并假定脱层界面和相关的 $G_c$ 为已知，由式(5.37)就可获得临界的 $\varepsilon_c$ 与 $a_0$ 之间一一对应的关系。如果 $a_0$ 用某种概率密度函数 $f(a_0)$来表示，那么，便有满足式(5.37)的 $\varepsilon_c$ 的相应范围，见图 5.15 所示。$a_0$ 等于或大于 $a_m$ 时，$\varepsilon_c$ 的极限值由 $G_{asy}/G_c=1$ 确定，该极限值作为临界应变 $\varepsilon_c$ 的下限。因为 $a_m$ 约为叠层厚度的一半，所以，与在较薄的叠层板中观察得到的脱层尺寸比较，它是很小的。实际上，$\varepsilon_c$ 的下限值通常被认为是脱层开始的临界应变。

3. 临界脱层界面

给定一个具体的叠层板，凭经验无法预测哪一个是最可能的脱层界面，这些问题需要分析，即对每一个可能发生脱层的界面上的 $G_{asy}/G_c$ 值进行比较。根据式(5.37)，脱层将发生在 $G_{asy}/G_c$ 为最大值(对相同的 $\varepsilon_c$)的界面上。

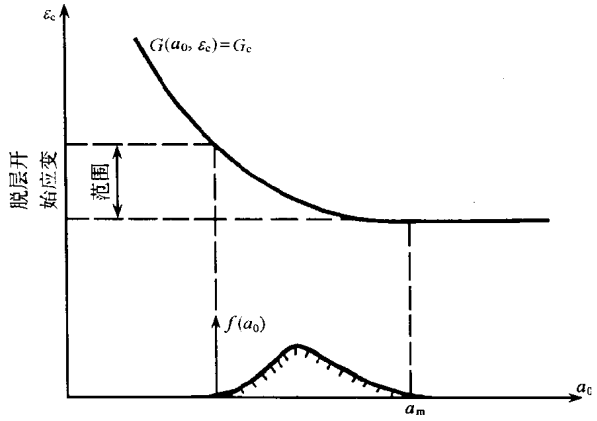



图 5.15　施加应变 $\varepsilon_c$ 与缺陷尺寸 $a_0$ 的关系及缺陷尺寸分布 $f(a_0)$示意图

尽管在各界面处的 $G_{asy}$容易求出，与各界面有关的 $G_c$ 从一个界面到另一界面仍可能不同。为了阐述这个事实，考虑由 AS4-3501-06 碳纤维/环氧铺叠成的$[\pm 25/90]_s$ 叠层板。用前述的广义平面应变模型，首先计算整个叠层板的应力场，得出脱层前自由边附近的层间应力。图 5.16 示出了自由边附近的层间正应力 $\sigma_{zz}$沿叠层厚度的分布。注意，接近－25/90 界面处，$\sigma_{zz}$是拉应力而且无界；在叠层板的中面(90/90 界面)上，$\sigma_{zz}$是拉应力而且有界。图 5.17 示出了在自由边附近的层间切应力 $\tau_{xz}$。这里，在 25/－25 和－25/90 界面上均存在无界的 $\tau_{xz}$。这些结果仅定性地建议，自由边脱层或者作为Ⅰ型裂纹发生在 90/0 界面上，或者作为混合型(Ⅰ型和Ⅲ型)裂纹发生在－25/90 界面上。

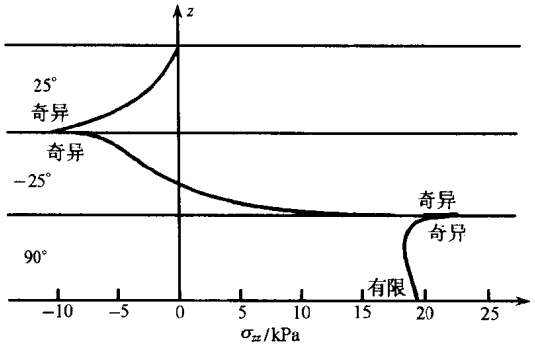



图 5.16　沿叠层厚度的正应力 $\sigma_{zz}$的分布

进一步的能量分析为中面的Ⅰ型裂纹提供$(G_{\mathrm{I}})_{asy}$，为－25/90 界面中的混合型裂纹提供$(G_{\mathrm{I}}+G_{\mathrm{II}})_{asy}$。在后者中，也获得了混合模式比 $G_{\mathrm{II}}/G_{\mathrm{I}}$。

Ⅰ型脱层的断裂韧度实际上与混合型的不同。实际上，各种混合型的界面破坏经常显露出断裂表面形态的差别，反之，则指在板尺度上测定的 $G_c$ 值的差别。使用碳纤维/环氧试样的实验室试验表明，Ⅰ型脱层的 $G_c$ 通常小于混合型脱层的 $G_c$，

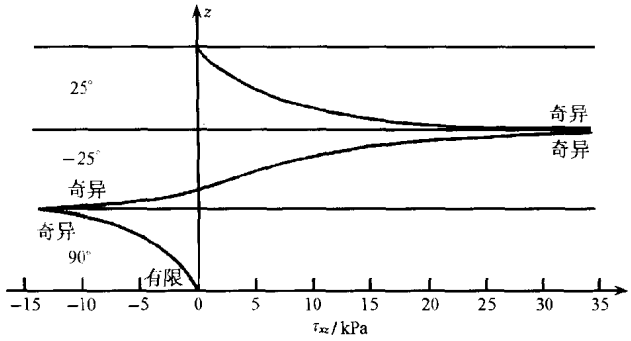



图 5.17　沿叠层厚度的切应力 $\tau_{xz}$的分布

而且，后者常常随剪切型号的增加而增加，即$(G_{\mathrm{I}})_c > (G_{\mathrm{I}})_c$。对混合型脱层中数值不定的 $G_c$ 原因是复杂的，最近的研究给出可能的解释是由于剪切变形导致局部裂纹顶端基体屈服和穿过裂纹表面的纤维桥联。对混合型脱层，为了使用式(5.37)，首先必须获得 $G_c$ 与混合模式比的关系。

对于上述所举之例，可以估计在该叠层板中面较易发生脱层，因为在中面上的 $G_{asy}/G_c$ 比 −25/90 界面上的大，这一估计与实验吻合。应该指出，对于混合型开裂，除式(5.37)之外，尚提出有许多其他的破坏准则。

### 5.5.2　一般的脱层问题

上述讨论的自由边脱层问题足以说明在能量方法描述中的基本原理。有效界面缺陷的假定允许进行某种破坏分析(从这一分析中可以确定脱层的起始)。该假定第一眼看来似乎是使用不便的，但是，与假定从应力出发的层间强度(它被用来确定在高度集中的边缘应力场中的脱层起始)的存在相比，它是便利的。

应该注意到，在实际中所遇到的脱层问题是非常复杂的，脱层面常常具有二维轮廓。由于沿有轮廓的裂纹前方的材料特性差异，描述有轮廓的脱层扩展可能需要一个定向依赖的准则。此外，在实际的叠层中的脱层扩展几乎总是伴随有其他类型的损伤，如横向开裂等。各种局部裂纹与脱层的相互作用在性质上可能既是确定的又是统计的。上述所讨论的能量法应用到更复杂的脱层问题看来具有足够的普遍性，该方法的一般拓展可以为众多的脱层问题提供(近似)定量的估计。

## 5.6　正交叠层板横向开裂的一种剪滞分析

纤维增强复合材料叠层板在拉伸荷载作用下的损伤扩展是非常复杂的过程，主要包括基体开裂、界面破坏、层间分层和纤维断裂等。各种因素的交互作用使破坏过程变得更加复杂。在上述的章节中，曾采用确定性理论和统计理论研究了正交叠层板在拉伸荷载作用下的横向开裂问题，所考虑的是横向裂纹贯穿整个 90°层

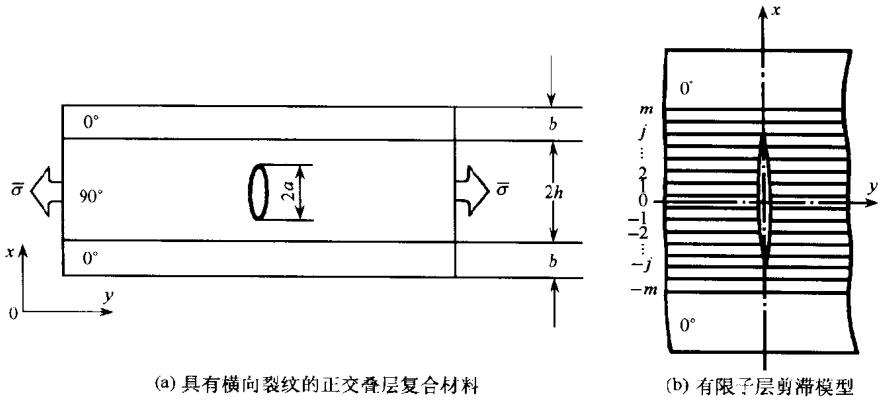
厚度，并且假设应力分别沿 0°和 90°层厚度均匀分布(此假设不大符合实际)，对横向裂纹未贯穿整个 90°层厚度的情形也无法计及。采用有限元计算虽然可以克服这些不足之处，但求解过程复杂，计算量大，在实际应用中存在诸多不便。下述的有限子层剪滞模型(1997)可以较好地解决上述问题。

### 5.6.1 初始开裂

1. 初始开裂的应力重新分布分析

(1)有限子层剪滞模型

考虑如图 5.18(a)所示的在 0°方向受均匀拉伸应力 $\bar{\sigma}$ 作用的$[0_2/90_n]_s$正交叠层板。假定 90°层中有一个长度为 $2a$ 并贯穿板宽的基体横向裂纹，为求解此种情形下的应力重新分布，建立如图 5.18(b)所示的**有限子层剪滞分析模型**。此模型将 90°层划分为 $2m+1$ 个有限子层，每层的厚度均为 $d(d=2h/(2m+1))$。长为 $2a$ 的裂纹可用 $-j$ 到 $j(-m<j<m)$共 $2j+1$ 个子层在 $y=0$ 处断裂来表示。假定每一子层的弹性性能与原 90°层的完全相同，在垂直于 $y$ 方向的截面上仅有正应力，上下表面仅有切应力。首先求解编号为 $k$ 和 $-k(-j\leqslant k\leqslant j)$的子层在 $y=0$ 处断裂时的应力重新分布，然后用叠加原理即可求得 $2j+1$ 个子层断裂时的应力重新分布。




(a) 具有横向裂纹的正交叠层复合材料　　(b) 有限子层剪滞模型

图 5.18

(2)编号为 $k$ 和 $-k$ 子层的断裂分析

首先考虑不受外载的情形，仅第 $k$ 和 $-k$ 子层在 $y=0$ 处已经断开。给 $k$ 和 $-k$ 子层在 $y\geqslant 0$ 的断口以无量纲单位位移(因对称，可只考虑 $y\geqslant 0$ 部分)。分离图 5.18(b)的 0°和 90°层，如图 5.19(a)，(b)。设 0°层 $y$ 方向的正应力 $\sigma'(x,y)$与 0°和 90°层界面处的切应力成正比，即

$$\sigma'(x,y)=F_1(x')\int_y^{\infty}\tau(y)\mathrm{d}y \tag{5.38}$$

其中，$F_1(x')$仅是 $x'=x-h$ 的函数。由 $y$ 方向的力平衡有

$$\int_0^b\sigma'(x,y)\mathrm{d}x'=-\int_y^{\infty}\tau(y)\mathrm{d}y \tag{5.39}$$

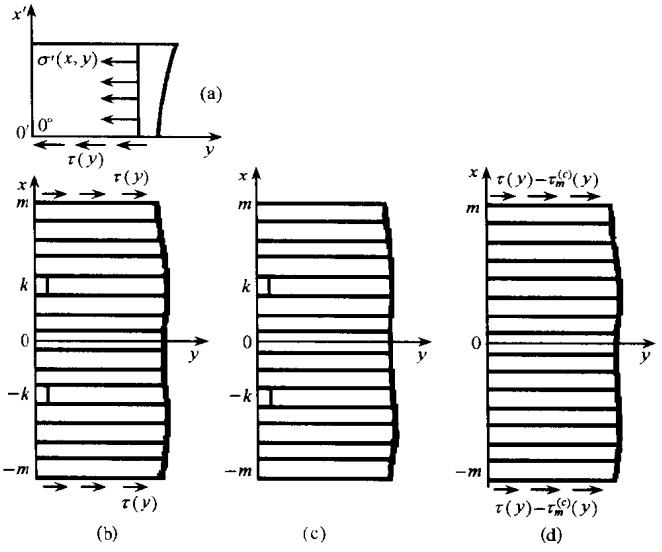



图 5.19　$k$ 和 $-k$ 子层在断口处有无量纲单位位移时的应力重新分布计算模型

由 $\sum M_{0'}=0$，有

$$\int_0^b \sigma'(x,y)x'\mathrm{d}x' = 0 \tag{5.40}$$

将式(5.38)代入式(5.39)和式(5.40)，有

$$\int_0^b F_1(x')\mathrm{d}'x = -1, \quad \int_0^b F_1(x')x'\mathrm{d}x' = 0 \tag{5.41}$$

为简便起见，取 $F_1(x')$ 为如下线性形式

$$F_1(x') = A_1x' + A_2 \tag{5.42}$$

将上式代入式(5.41)即可确定 $A_1$ 和 $A_2$，因此有

$$F_1(x') = \frac{2}{b}\left(\frac{3}{b}x' - 2\right) \tag{5.43}$$

由应力-应变关系可求出 0°层的正应变

$$\varepsilon'(x,y) = \frac{F_1(x')}{E_{11}}\int_y^\infty \tau(y)\mathrm{d}y \tag{5.44}$$

图 5.19(b)中 90°层的应力分布可由图 5.19(c)，(d)两种情况叠加求得。图 5.19(c)情形是将 90°层延拓为无限大，其中第 $k$ 和 $-k$ 子层在 $y=0$ 处已经断开，并且给定 $k$ 和 $-k$ 子层在 $y\geqslant 0$ 的断口以无量纲单位位移。图 5.19(d)情形则仅含有 $2m+1$ 个子层，而且所有子层均不发生断裂，但在 90°层上、下表面，即 $x=\pm h$ 处，作用有切应力[$\tau(y)-\tau_m^{(c)}(y)$]，其中 $\tau_m^{(c)}(y)$ 是图 5.19(c)中第 $m(-m)$ 单元上(下)表面的切应力。

下面先求解图 5.19(c)问题。在任意第 $i(-\infty<i<+\infty)$ 子层中截取一个 $d\times$

$dy$ 微元体，设其 $y$ 方向的位移为 $v_i(y)$。根据剪滞理论，假设微元体截面上仅有正应力，上、下表面仅有切应力，由此可列出其剪滞平衡方程

$$dE_{22}\frac{\mathrm{d}^2v_i}{\mathrm{d}y^2}+\frac{G_{12}}{d}(v_{i+1}-2v_i+v_{i-1})=0 \tag{5.45}$$

式中，$E_{22}$和 $G_{12}$分别为 90°层垂直于纤维方向的拉伸和切变模量。引入无量纲量

$$v_i(y)=d\sigma_2(E_{22}G_{12})^{-1/2}V_i,\quad y=d(E_{22}/G_{12})^{1/2}\xi \tag{5.46}$$

式中，$\sigma_2$ 为 90°层的远场正应力。式(5.44)可简化为

$$\frac{\mathrm{d}^2V_i}{\mathrm{d}\xi^2}+(V_{i+1}-2V_i+V_{i-1})=0 \tag{5.47}$$

图 5.19(c)的边界条件为

$$\xi=0:V_i=1(i=k,-k),\quad V_i=0(i\neq k,-k);$$

$$\xi=\infty:\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}\xi}=0\quad(-\infty<i<+\infty) \tag{5.48}$$

式(5.47)和式(5.48)构成混合边值问题，可采用 Hedgepeth 提出的影响函数法及叠加原理求解，其结果为

$$V_i=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos i\theta\cos k\theta\exp\left(-2\xi\sin\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta \tag{5.49}$$

由此可求得图 5.19(c)中第 $i$ 子层的正应力

$$\begin{aligned}\sigma_i^{(c)}(y)&=d\sigma_2(E_{22}/G_{12})^{1/2}\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}y}\\&=-4\frac{\sigma_2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos i\theta\cos k\theta\sin\frac{\theta}{2}\exp\left(-2\frac{y}{d}\sqrt{\frac{G_{12}}{E_{22}}}\sin\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{5.50}$$

及切应力

$$\begin{aligned}\tau_i^{(c)}(y)&=\frac{G_{12}}{d}(v_{i+1}-v_i)=\sigma_2\left(\frac{G_{12}}{E_{22}}\right)^{1/2}(V_{i+1}-V_i)\\&=-4\frac{\sigma_2}{\pi}\left(\frac{G_{12}}{E_{22}}\right)^{1/2}\int_0^{\pi}\sin\frac{2i+1}{2}\theta\cos k\theta\sin\frac{\theta}{2}\exp\left(-2\frac{y}{d}\sqrt{\frac{G_{12}}{E_{22}}}\sin\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{5.51}$$

设图 5.19(d)中的正应力 $\sigma_i^{(d)}(y)$与$[\tau(y)-\tau_m^{(c)}(y)]$的轴向合力成正比，即取

$$\sigma_i^{(d)}(y)=F_2(i)\int_y^{\infty}[\tau(y)-\tau_m^{(c)}(y)]\mathrm{d}y \tag{5.52}$$

其中，$F_2(i)$仅是 $i$ 的函数。由力的平衡关系$\sum Y=0$，有

$$d\sigma_0^{(d)}(y)+2\sum_{i=1}^{m}d\sigma_i^{(d)}(y)=2\int_y^{\infty}[\tau(y)-\tau_m^{(c)}(y)]\mathrm{d}y \tag{5.53}$$

由力矩平衡关系$\sum M_0=0$，有

$$\frac{1}{8}d^2\sigma_0^{(d)}(y)+\sum_{i=1}^{m}id^2\sigma_i^{(d)}(y)=h\int_y^{\infty}[\tau(y)-\tau_m^{(c)}(y)]\mathrm{d}y \tag{5.54}$$

将式(5.52)代入式(5.53)和式(5.54),有

$$F_2(0)+2\sum_{i=1}^{m}F_2(i)=\frac{2}{d},\quad F_2(0)+8\sum_{i=1}^{m}iF_2(i)=\frac{8h}{d^2} \tag{5.55}$$

为简便起见,取 $F_2(i)$ 为如下线性形式

$$F_2(i)=A_3i+A_4 \tag{5.56}$$

代入式(5.55)求出系数 $A_3$ 和 $A_4$,因此

$$F_2(i)=\frac{2}{d}\left[\frac{3i}{m(1+m)}-\frac{2}{1+2m}\right] \tag{5.57}$$

注意,上述的 $\tau_m^{(c)}(y)$ 可由式(5.51)令 $i=m$ 得到。

图 5.19(b)中 90°层的 $\sigma_i'(y)$ 由线性叠加原理得到,即式(5.50)和式(5.52)相加得

$$\begin{aligned}\sigma_i'(y)&=\sigma_i^{(c)}(y)+\sigma_i^{(d)}(y)\\&=\frac{4\sigma_2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{d}{2}F_2(i)\sin\frac{2m+1}{2}\theta-\cos i\theta\sin\frac{\theta}{2}\right]\cos\theta\\&\quad\times\exp\left[-\frac{2y}{d}(G_{12}/E_{22})^{1/2}\sin\frac{\theta}{2}\right]d\theta+F_2(i)\int_y^{\infty}\tau(y)dy\end{aligned} \tag{5.58}$$

相应的应变为

$$\varepsilon_i'(y)=\sigma_i'(y)/E_2 \tag{5.59}$$

在 0°与 90°层的界面处,应变必须连续,即在界面处,0°层的应变等于 90°层的应变,因此

$$\varepsilon'(x,y)|_{x'=0}=\varepsilon_i'(y)|_{i=m} \tag{5.60}$$

将式(5.44)和式(5.59)代入上式求界面切应力的合力 $\int_0^{\infty}\tau(y)dy$,代回式(5.58),有

$$\sigma_i'(y)=2\sigma_2\int_0^{\pi}f(\theta,i)\cos k\cos\theta\exp\left[-\frac{2y}{d}(G_{12}/E_{22})^{1/2}\sin\frac{\theta}{2}\right]d\theta \tag{5.61}$$

其中

$$f(\theta,i)=dF_2(i)\left[\frac{1}{\pi}-\frac{F_2(m)}{4D}\right]\sin\frac{2m+1}{2}\theta+\left[F_2(i)\frac{\cos m\theta}{2D}-\frac{2}{\pi}\cos i\theta\right]\sin\frac{\theta}{2} \tag{5.62}$$

其中

$$D=\frac{\pi}{4}\left[F_2(m)-\frac{E_{22}}{E_{11}}F_1(0)\right] \tag{5.63}$$

式(5.61)即为 $k$ 和 $-k$ 子层在 $y=0$ 处断开、$k$ 和 $-k$ 子层在 $y\geqslant 0$ 的断口处有一无量纲单位位移时 90°层的应力解答。当断口处的无量纲位移为 $U_k(U_k=U_{-k})$ 时,根据线性叠加原理,此时 90°层中第 $i$ 子层的正应力为 $U_k\sigma_i'(y)$。

(3)编号从 $-j$ 到 $j$ 共 $2j+1$ 个子层断裂的分析

仍考虑图 5.18(b)模型不受外载的情形。设编号从 $-j$ 到 $j$ 共 $2j+1$ 个子层在

$y=0$ 处已经断开，相应的无量纲位移为 $U_{-j},\cdots,U_j(U_i=U_{-i},i=0,1,2,\cdots,j)$。根据叠加原理，此时 90°层中第 $i$ 子层的正应力为

$$\sigma_i^*(y)=\frac{1}{2}U_k\sigma_i^{'}(y)\Big|_{k=0}+\sum_{k=1}^{j}U_k\sigma_i^{'}(y) \tag{5.64}$$

上式再叠加上在施加应力 $\bar{\sigma}$ 作用下的远场应力 $\sigma_2$，即可求得图 5.18(b)中 90°层正应力

$$\sigma_i(y)=\sigma_2+\sigma_i^*(y)=K_i(y)\sigma_2 \tag{5.65}$$

其中

$$K_i(y)=1+U_0\int_0^{\pi}f(\theta,i)\exp\left[-\frac{2y}{d}(G_{12}/E_{22})^{1/2}\sin\frac{\theta}{2}\right]\mathrm{d}\theta$$
$$+2\sum_{k=1}^{j}U_k\int_0^{\pi}f(\theta,i)\cos k\theta\exp\left[-\frac{2y}{d}(G_{12}/E_{22})^{1/2}\sin\frac{\theta}{2}\right]\mathrm{d}\theta \tag{5.66}$$

称为 90°层中第 $i$ 子层的应力集中系数。无量纲位移 $U_k(k=0,1,2,\cdots,j)$可由裂纹表面的应力条件 $\sigma_i(0)=0(i=0,1,2,\cdots,j)$确定，即

$$1+U_0\int_0^{\pi}f(\theta,i)\mathrm{d}\theta+2\sum_{k=1}^{j}U_k\int_0^{\pi}f(\theta,i)\cos k\theta\mathrm{d}\theta=0,\quad i=0,1,2,\cdots,j \tag{5.67}$$

上式为 $j+1$ 元线性代数方程组，从中求出 $U_k(k=0,1,2,\cdots,j)$，代回式(5.65)和式(5.66)即可完全确定 $\sigma_i(y)$和 $K_i(y)$。

2. 能量法及初始破坏应变

(1)应变能释放率

根据经典的断裂力学方法，裂纹扩展时释放的应变能可以通过计算裂纹闭合复原时所需做的功来得到。设裂纹长度为 $2a$，$\Delta a$ 为裂纹长度增量，I 型裂纹的应变能释放率计算公式如下

$$G_{\mathrm{I}}=\lim_{\Delta a\to 0}\frac{1}{2\Delta a}\int_0^{\Delta a}\sigma_y\Delta u\mathrm{d}a \tag{5.68a}$$

式中，$\sigma_y$ 是裂纹长度为 $2a$ 时，裂纹尖端垂直于裂纹表面的正应力；$\Delta u$ 是裂纹长度为 $2(a+\Delta a)$的裂纹表面的相对位移。90°层的横向裂纹属于 I 型裂纹。图 5.20 是采用有限子层模型模拟裂纹扩展的示意图，根据图 5.20 和式(5.68a)，有

$$G_{\mathrm{I}}=\frac{1}{2}\sigma_{j+1}(0)\times d\times 2u_{j+1}(0)/d=\sigma_{j+1}(0)u_{j+1}(0) \tag{5.68b}$$

式中，$\sigma_{j+1}(0)$是裂纹长度为 $2a$ 时(见图 5.20(a))第 $j+1$ 子层在 $y=0$ 处的正应力，由式(5.65)和式(5.66)求得；$u_{j+1}(0)=d\sigma_2(E_{22}G_{12})^{-1/2}U_{j+1}$是裂纹长度为 $2(a+\Delta a)$时(见图 5.20(b))第 $j+1$ 子层在 $y=0$ 处的位移；$U_{j+1}(0)$是相应的无量纲位移，由式(5.67)求得。因此

$$G_{\mathrm{I}}=d\sigma_2(E_{22}G_{12})^{-1/2}\sigma_{j+1}(0)U_{j+1} \tag{5.68c}$$

上述的推导尚未计及叠层板的固化残余热应力的影响。当考虑固化温差效应

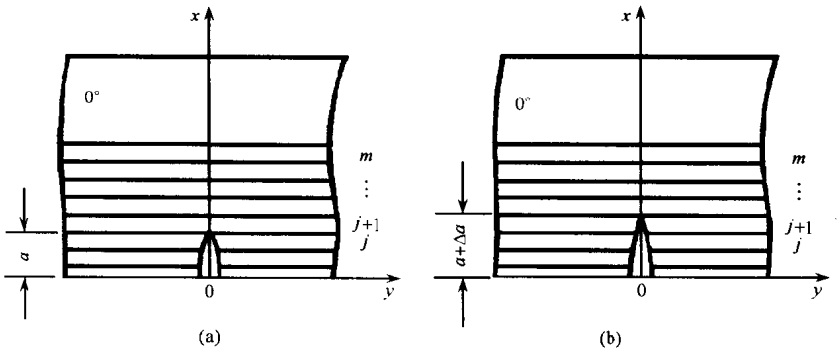



图 5.20　应变能释放率计算模型

时，应变能释放率(式(5.36))可表达成如下形式

$$G_{\mathrm{I}} = [\sqrt{C_{\mathrm{e}}(a)}\varepsilon_{\mathrm{c}} + \sqrt{C_{\mathrm{T}}(a)}\Delta T]^2 2t \tag{5.68d}$$

式中，$\varepsilon_{\mathrm{c}}=\sigma_2/E_{22}$为施加 $\bar{\sigma}$ 引起的叠层板的远场轴向应变；$\Delta T$ 为固化温度与工作温度之差；$2t$ 为单层板厚度；$C_{\mathrm{e}}(a)$和 $C_{\mathrm{T}}(a)$分别为单位应变($\varepsilon_{\mathrm{c}}=1$)与单位温差($\Delta T=1$℃)下，单层厚度为一个单位位移时的裂纹扩展能量释放率系数。令 $\Delta T=0$ 及 $\varepsilon_{\mathrm{c}}=1$，由式(5.68c)和式(5.68d)，有

$$C_{\mathrm{e}}(a) = \frac{d\sigma_2}{t}(E_{22}(G_{12})^{-1/2}\sigma_{j+1}(0)U_{j+1}|_{\sigma_2=E_{22}} \tag{5.69}$$

上式即为由有限子层剪滞模型导出的 $C_{\mathrm{e}}(a)$计算公式，$C_{\mathrm{T}}(a)$值可取自 Wang、Kirshore 和 Li(1985)的结果。

(2)初始破坏应变的确定

在分析 90°层横向开裂时，Wang, Kirshore 和 Li 认为，单层板内有关原始缺陷可用随机分布的微裂纹反映，并设裂纹尺寸为 $2a$ 的分布函数可用两参数韦布尔分布(式(5.34))表示，即

$$F(a) = 1 - \exp[-(a/\alpha)^{\beta}] \tag{5.70}$$

这些裂纹中“最严重”的尺寸 $2a_0$ 定义为裂纹尺寸不大于该值的概率是 0.97，即

$$F(a_0) = P\{a \leqslant a_0\} = 0.97 \tag{5.71}$$

对于$[0_2/90_n]_{\mathrm{s}}$板，中间 90°层由 $2n$ 个单层板叠成，其微观裂纹尺寸应大于单层板的微裂纹尺寸。设 90°层中“最严重”的裂纹尺寸是 $2a_{\mathrm{m}}$，参照式(5.29)有

$$a_{\mathrm{m}} = a_0(2n)^{2/\beta} \tag{5.72}$$

设 $\varepsilon_{\mathrm{c}}^0$ 为正交叠层板中 90°层发生基体开裂时的初始破坏应变，当 $\varepsilon_{\mathrm{c}}=\varepsilon_{\mathrm{c}}^0$ 时，“最严重”的微裂纹开始扩展成基体横向裂纹。根据能量判据，这时裂纹尖端区域的应变能释放率等于临界值 $G_{\mathrm{Ic}}$，即

$$G_{\mathrm{I}}|_{\varepsilon_{\mathrm{c}}=\varepsilon_{\mathrm{c}}^0, a=a_{\mathrm{m}}} = G_{\mathrm{Ic}} \tag{5.73}$$

将式(5.68d)代入上式,有

$$[\sqrt{C_e(a_m)}\varepsilon_c^0 + \sqrt{C_T(a_m)}\Delta T]^2 2t = G_{1c} \tag{5.74}$$

由此可确定正交叠层板中 90°层发生基体开裂时的初始破坏应变 $\varepsilon_c^0$。

以 T300/934$[0_2/90_2]_s$ 和$[0_2/90_4]_s$ 叠层板为例,采用表 5.2 中的数据进行计算。

**表 5.2 T300/934 单向板的基本数据**

| $E_{11}$/GPa | $E_{22}$/GPa | $G_{12}$/GPa | $2t$/mm | $\beta$ | $a$/mm | $\Delta T$/℃ | $G_{1c}$/($10^9$J/m$^2$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 144.8 | 11.7 | 3.5 | 0.132 | 4 | 0.96$t$ | 125 | 228 |

图 5.21(a),(b)示出了由上述方法求得的应变能释放率系数 $C_e(a)$ 与裂纹长度的关系,作为比较,图中还示出了 Wang 等的三维有限元的计算结果。从图中可以看到,$m$ 值愈大,即划分的子层愈多,该方法的计算结果愈接近有限元的计算结果。

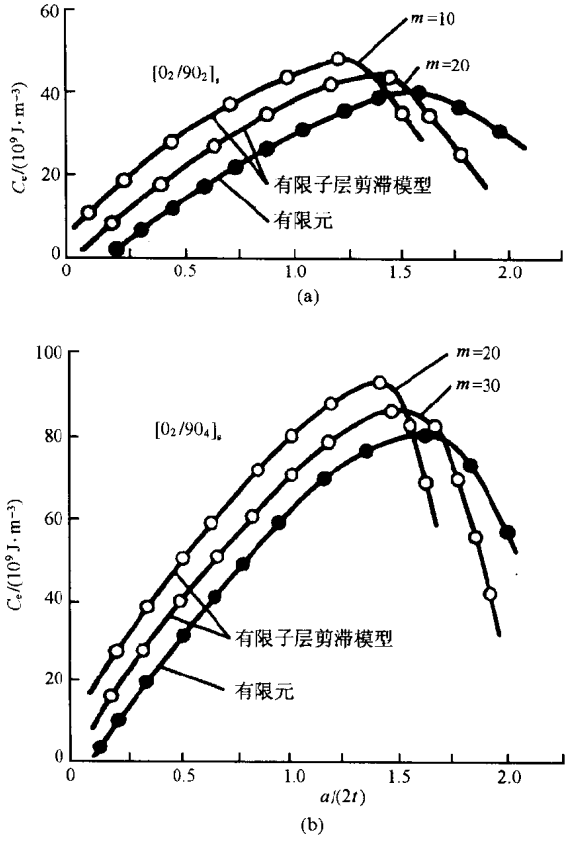



图 5.21 应变能释放率系数与裂纹长度的关系

由式(5.70)～(5.72)求得$[0_2/90_2]_s$和$[0_2/90_4]_s$叠层板中90°层所含有的"最严重"的微裂纹尺寸$a_m$分别为2.6$t$和3.6$t$。再由式(5.69)或图5.21中求出相应的应变能释放率系数$C_e(a_m)$，结果见表5.3所示，表中还给出了Wang等的求得的$C_T(a_m)$。由式(5.74)可求得初始破坏应变$\varepsilon_c^0$，并列于表5.4中，为了比较，表中亦列出了Wang等的有限元的计算结果和实验值。从表中可以看出，有限子层剪滞模型的计算结果均落在实验范围内而且与有限元结果较为接近。值得指出的是，有限元计算结果略微超过和非常接近实验的上限值。这表明，图5.21中有限元求得的应变能释放率系数$C_e(a)$偏小，而采用有限子层剪滞模型对$[0_2/90_2]_s$取$m=20$、对$[0_2/90_4]_s$取$m=30$求得的$C_e(a)$则是比较准确的。

**表5.3　$a=a_m$时的应变能释放率系数**

| 叠层类型 | $C_e(a_m)/(10^9\text{J/m}^3)$ | $C_T(a_m)/[10^9\text{J/(m}^3\cdot\text{C}^2)]$ |
|---|---|---|
| $[0_2/90_2]_s$ | 42.00($m=20$) | 23.8 |
| $[0_2/90_4]_s$ | 63.00($m=30$) | 29.25 |

**表5.4　正交叠层板的初始破坏应变**

| 叠层类型 | 初始破坏应变/% | | |
|---|---|---|---|
| | 有限子层剪滞模型 | 有限元 | 实验 |
| $[0_2/90_2]_s$ | 0.344 | 0.361 | 0.29～0.36 |
| $[0_2/90_4]_s$ | 0.254 | 0.273 | 0.24～0.28 |

### 5.6.2　多级断裂

1. 计算模型

考虑复合材料正交叠层板在施加应力$\bar{\sigma}$作用下，90°层发生横向基体多级开裂，如图5.22所示。设裂纹长度均为2$a$，裂纹平均间距为$s$，建立如图所示的坐标系。在求解此种情形的应力重新分布时，为了简便，仅考虑相邻裂纹之间的相互影响，对其他裂纹的影响则忽略不计。下面将根据前述的有限子层剪滞模型进行求解。

2. 编号为$k$和$-k$子层的多级断裂分析

首先考虑叠层板远端无外荷载作用的情形，仅第$k$和$-k$($-j\leqslant k\leqslant j$)子层在$y=\pm s/2$处已经断开，如图5.23(a)所示。给$k$和$-k$子层在断口以无量纲单位位移，根据线性叠加原理，图5.23(a)情形是图5.23(b)和图5.23(c)两种情形的叠加。在图5.23(b)中，$k$和$-k$子层仅在$y=-s/2$处已经断开；在图5.23(c)中，$k$和$-k$子层仅在$y=s/2$处断开。这样，图5.23(b)和图5.23(c)两种情形均分别等价于图5.19情形，因此，可以直接利用其结果进行求解。

对式(5.61)分别进行坐标变换，相加即得图5.23(a)情形的应力重新分布。第

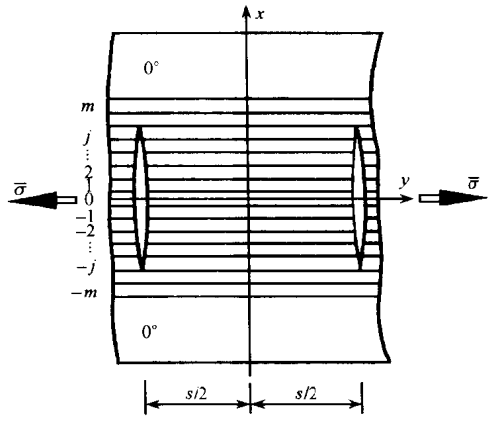



图 5.22　具有横向多级断裂的有限子层剪滞模型

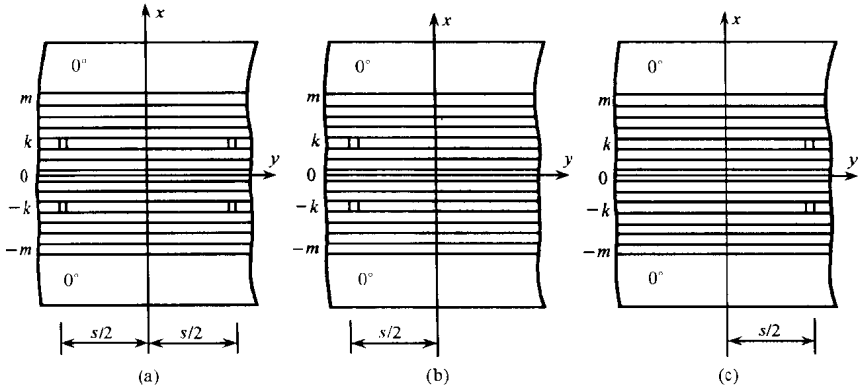



图 5.23　$k$ 和 $-k$ 子层在断口处有无量纲单位位移时的应力重新分布计算模型

$i$ 子层的应力分布为

$$p_i'(y)=2\sigma_2\int_0^{\pi}f^*(\theta,i)g(y,\theta)\cos k\theta\mathrm{d}\theta,\quad i=-m,\cdots,m;\qquad -s/2\leqslant y\leqslant s/2 \tag{5.75}$$

其中

$$f^*(\theta,i)=dq(i)\left[\frac{1}{\pi}-\frac{q(m)}{4D^*}\right]\sin\frac{2m+1}{2}\theta+\left[q(i)\frac{\cos m\theta}{2D^*}-\frac{2}{\pi}\cos i\theta\right]\sin\frac{\theta}{2} \tag{5.76}$$

$$q(i)=\frac{2}{d}\left[\frac{3i}{m(m+1)}-\frac{2}{1+2m}\right],\quad D^*=\frac{\pi}{4}\left[q(i)+\frac{4}{b}\frac{E_{22}}{E_{11}}\right] \tag{5.77}$$

$$g(y,\theta)=\exp\left[-\frac{2}{d}\left(\frac{G_{12}}{E_{22}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(y+\frac{s}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}\right]+\exp\left[\frac{2}{d}\left(\frac{G_{12}}{E_{22}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(y-\frac{s}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}\right] \tag{5.78}$$

当给定断口处的无量纲位移为$U_k^*$($U_k^*=U_{-k}^*$)时，根据线性叠加原理，此时应力分布为$U_k^* p_i'(y)$。

3. 编号从$-j$到$j$共$2j+1$个子层发生多级断裂分析

仍考虑叠层板不受外载的情形。设编号从$-j$到$j$共$2j+1$个子层在$y=\pm s/2$处已经断开，相应的无量纲位移为$U_{-j}^*,\cdots,U_j^*$($U_i^*=U_{-i}^*, i=0,1,2,\cdots,j$)。根据叠加原理，此时90°层中第$i$子层的正应力为

$$p_i^*(y)=\frac{1}{2}U_k^* p_i'(y)|_{k=0}+\sum_{k=1}^{j}U_k^* p_i'(y),\quad i=-m,\cdots,m \tag{5.79}$$

式(5.79)再叠加上叠层板在施加应力$\bar{\sigma}$作用下的远场应力$\sigma_2$，即可求得图5.22所示90°层横向基体发生多级开裂的第$i$子层的正应力

$$p_i(y)=\sigma_2+p_i^*(y)=K_i^*(y)\sigma_2,\quad i=-m,\cdots,m;\quad -s/2\leqslant y\leqslant s/2 \tag{5.80}$$

其中

$$K_i^*(y)=1+U_0^*\int_0^{\pi}f^*(\theta,i)g(y,\theta)\mathrm{d}\theta+2\sum_{k=1}^{j}U_k^*\int_0^{\pi}f^*(\theta,i)g(y,\theta)\cos k\theta\mathrm{d}\theta \tag{5.81}$$

式中的$K_i^*(y)$称为90°层发生多级开裂时第$i$子层的应力集中系数。无量纲位移$U_k^*$($k=0,1,2,\cdots,j$)可由裂纹表面的应力条件

$$p_i(s/2)=0,\quad i=0,1,2,\cdots,j \tag{5.82}$$

确定。将式(5.79)代入上式得

$$1+U_0\int_0^{\pi}f^*(\theta,i)g(s/2,\theta)\mathrm{d}\theta+2\sum_{k=1}^{j}U_k^*\int_0^{\pi}f^*(\theta,i)g(s/2,\theta)\cos k\theta\mathrm{d}\theta=0\quad(i=0,1,2,\cdots,j) \tag{5.83}$$

由上述线性代数方程组求出$U_k^*$($k=0,1,2,\cdots,j$)，代回式(5.80)和式(5.81)，可确定$p_i(y)$和$K_i^*(y)$。

4. 裂纹密度与施加应力的关系

设$\varepsilon_i^*$和$U_i^*$分别为图5.22所示第$i$子层的应变和位移。由几何关系$\varepsilon_i^*=\mathrm{d}U_i^*(y)/\mathrm{d}y$及本构关系$\varepsilon_i^*=p_i(y)/E_{22}$，并考虑对称性，有

$$U_i^*(y)=\frac{1}{E_{22}}\int_0^{y}p_i(y)\mathrm{d}y \tag{5.84}$$

第0°号子层的轴向平均应变由下式定义

$$\bar{\varepsilon}=\frac{2U_0^*(s/2)}{s}=\frac{2}{sE_{22}}\int_0^{\frac{s}{2}}p_i(y)\mathrm{d}y \tag{5.85}$$

设各裂纹均扩展到90°与0°层之间的界面处，即贯穿90°层厚度。为保证界面连续条件式(5.60)得以满足，所以取$j=m-1$近似裂纹扩展到界面的情形。将式(5.80)和式(5.81)代入式(5.85)并令$j=m-1$，有

$$\bar{\varepsilon} = H(s)\sigma_2/E_{22} \tag{5.86}$$

其中

$$H(s) = 1 + \frac{d}{s}\sqrt{\frac{E_{22}}{G_{12}}}U_0^* \int_0^\pi R(\theta,s)\mathrm{d}\theta + \frac{2d}{s}\sqrt{\frac{E_{22}}{G_{12}}}\sum_{k=1}^{m-1}U_k^* \int_0^\pi R(\theta,s)\cos k\theta \mathrm{d}\theta \tag{5.87}$$

其中

$$R(\theta,s) = \left[1 - \exp\left(-\frac{2}{d}\sqrt{\frac{G_{12}}{E_{22}}}s\sin\frac{\theta}{2}\right)\right] f^*(\theta,0)/\sin\frac{\theta}{2} \tag{5.88}$$

假定当 0°号子层的轴向平均应变 $\bar{\varepsilon}$ 等于叠层板的初始破坏应变 $\varepsilon_c^0$ 时，产生新的横向裂纹，并假设新增加的裂纹产生在原两条横向裂纹的正中间，即 $y=0$ 处。这时，裂纹间距由 $s$ 减小至 $s/2$。令 $\bar{\varepsilon}=\varepsilon_c^0$，由式(5.86)有

$$\sigma_2 = E_{22}\varepsilon_c^0/H(s) \tag{5.89}$$

根据经典叠层板理论，正交对称叠层板在均匀单向拉伸荷载作用下，远场各层的应变相等，故有

$$\sigma_1/E_{11} = \sigma_2/E_{22} \tag{5.90}$$

式中，$\sigma_1$ 为 0°层的远场正应力。由力的平衡关系有

$$2b\sigma_1 + 2h\sigma_2 = (2b + 2h)\bar{\sigma} \tag{5.91}$$

由上两式有

$$\sigma_2 = (b + h)\bar{\sigma}/(bE_{11}/E_{22} + h) \tag{5.92}$$

将上式代入式(5.89)，有

$$\bar{\sigma} = (bE_{11} + hE_{22})\varepsilon_c^0/[(b + h)H(s)] \tag{5.93}$$

令 $H(s)=Q(W)$，其中 $W=2/s$ 为当前裂纹密度，有

$$Q(W) = (bE_{11} + hE_{22})\varepsilon_c^0/[(b + h)\bar{\sigma}] \tag{5.94}$$

上式反映了施加应力 $\bar{\sigma}$ 与裂纹密度 $W$ 的关系。

仍以 T300/934$[0_2/90_2]_s$ 和$[0_2/90_4]_s$ 叠层板为例进行计算。计算所需的基本数据及有限子层数与前述相同，初始破坏应变 $\varepsilon_c^0$ 也取自前述的计算结果(见表 5.2～5.4)。

图 5.24 示出了由式(5.94)求得的裂纹密度 $W$ 与施加应力 $\bar{\sigma}$ 的关系曲线，图中也给出了 Wang 等的实验结果(见图 5.10 和图 5.12)。从图中可见，随着施加应力的增加，裂纹密度也增加，并逐渐趋于某一常数。这表明，当施加应力达到或超过某值时，裂纹密度达到饱和，不再产生新的裂纹。这种饱和状态被称之为复合材料正交叠层板的**特征损伤状态**。随后的进一步加载将出现其他的损伤状态(如层间界面破坏、0°层的基体纵向裂纹、纤维断裂、纤维/基体界面破坏等等)。从图中还可以看出，有限子层剪滞模型的计算结果略高于实验值。以下几点可能是产生误差的原因：①没有考虑固化残余热应力的影响；②未计及非相邻裂纹之间的影响；③按照

统计的观点，新增加的裂纹不一定产生在原两条横向裂纹的正中间。

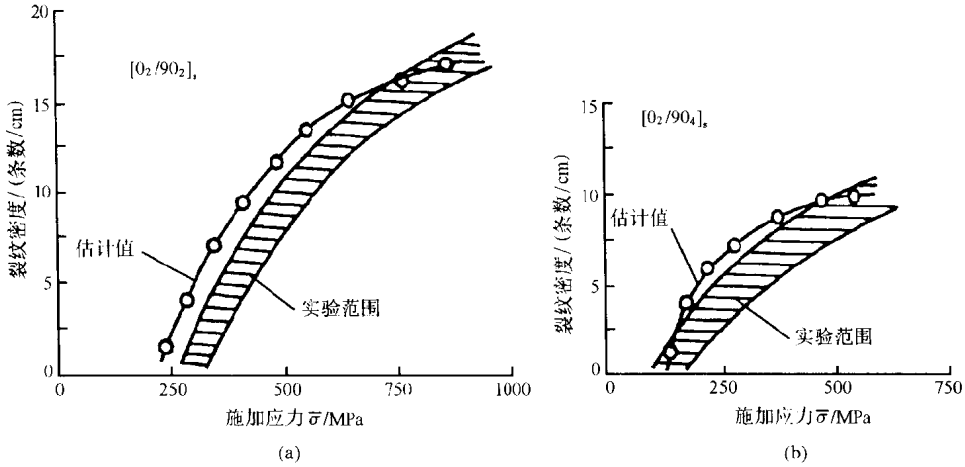



图 5.24　裂纹密度与施加应力的关系

## 5.7　碳/环氧正交叠层板的统计破坏强度分析

Fukunaga 和 Chou(1984)基于统计强度分析，研究了[0/90/0]和[90/0/90]正交叠层板的破坏特性。采用剪滞模型分析了 90°层破坏时的应力重新分布，导出了首条基体开裂、随后的多级开裂及最后破坏的公式，得到了与实验较符合的结果。

### 5.7.1　正交叠层板的应力分析

考虑图 5.25 所示的正交叠层板，在轴向施加拉伸应力 $\bar{\sigma}_x$ 的作用下，90°层发生了横向基体开裂。此种情形的应力重新分布可以采用剪滞理论进行分析。

设沿 $x$ 和 $y$ 方向的位移分别为 $u$ 和 $v$，据线性经典叠层板理论，它们可用下式表示

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \varepsilon_0 x + U_1(x), \quad u_2 = \varepsilon_0 x + U_2(x), \\ v_1 &= -\frac{A_{12}}{A_{22}}\varepsilon_0 y + V_1(x), \quad v_2 = -\frac{A_{12}}{A_{22}}\varepsilon_0 y + V_2(x) \end{aligned}\right\} \tag{5.95}$$

式中，下标 1 和 2 分别表示 0°层和 90°层；$\varepsilon_0$ 是由 $\bar{\sigma}_x$ 所产生的沿 $x$ 方向的均匀应变；$U$，$V$ 均是 $x$ 的单值函数；$A_{ij}(i,j=1,2,6)$是叠层板的拉(压)剪刚度系数，由下式给出

$$A_{11} = Q_{11}b + Q_{22}h, \quad A_{12} = Q_{12}(b+h), \quad A_{22} = Q_{22}b + Q_{11}h \tag{5.96}$$

其中 $Q_{ij}(i,j=1,2,6)$为单向板的折算刚度。在轴向施加拉伸应力 $\bar{\sigma}_x$ 的作用下，均匀的应力和应变由下式给出

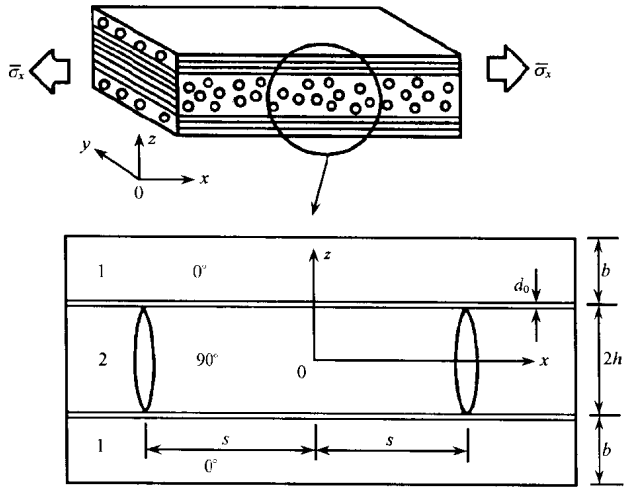



图 5.25　正交叠层板和分析模型

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_{x0}=\frac{A_{22}(b+h)}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\bar{\sigma}_x=\varepsilon_0,\quad \varepsilon_{y0}=-\frac{A_{12}(b+h)}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\bar{\sigma}_x=-\frac{A_{12}}{A_{22}}\varepsilon_0\\
&\sigma_{x0}^{(1)}=Q_{11}\varepsilon_0\left(1-\frac{Q_{12}A_{12}}{Q_{11}A_{22}}\right),\quad \sigma_{y0}^{(1)}=Q_{12}\varepsilon_0\left(1-\frac{Q_{22}A_{12}}{Q_{12}A_{22}}\right)\\
&\sigma_{x0}^{(2)}=Q_{22}\varepsilon_0\left(1-\frac{Q_{12}A_{12}}{Q_{22}A_{22}}\right),\quad \sigma_{y0}^{(2)}=Q_{12}\varepsilon_0\left(1-\frac{Q_{11}A_{12}}{Q_{12}A_{22}}\right)
\end{aligned}\right\}\tag{5.97}$$

令

$$\bar{E}_x=\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}{A_{22}(b+h)}$$

为正交叠层板沿 $x$ 方向的拉伸模量，因此

$$\varepsilon_0=\bar{\sigma}_x/\bar{E}_x\tag{5.98}$$

考虑 90°层中裂纹间距为 $2s$ 时的多级破坏情形(见图 5.25)，列出其平衡方程是

$$\left.\begin{aligned}
&Q_{11}\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}x^2}+\frac{G_{\mathrm{m}}}{bd_0}(u_2-u_1)=0,\quad Q_{22}\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{G_{\mathrm{m}}}{hd_0}(u_2-u_1)=0\\
&Q_{66}\frac{\mathrm{d}^2v_1}{\mathrm{d}x^2}+\frac{G_{\mathrm{m}}}{bd_0}(v_2-v_1)=0,\quad Q_{66}\frac{\mathrm{d}^2v_2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{G_{\mathrm{m}}}{hd_0}(v_2-v_1)=0
\end{aligned}\right\}\tag{5.99}$$

式中，$d_0$ 是 0°层和 90°层之间的纯树脂薄层的厚度(见图 5.25)。边界条件是

$$\left.\begin{aligned}
&x=0:U_1=U_2=0,\quad V_1=V_2=0\\
&x=s:\sigma_x^{(2)\mathrm{M}}+\sigma_x^{(2)\mathrm{T}}=0,\quad b\sigma_x^{(1)\mathrm{M}}=(b+h)\bar{\sigma}_x,\quad V_1=0,\quad \frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}x}=0
\end{aligned}\right\}\tag{5.100}$$

式中，上标 M 和 T 分别表示由力学产生的量(项)和由热造成的量(项)，上标(1)和(2)分别表示 0°层和 90°层。根据经典叠层板理论，可以获得下列的热残余应力

的计算公式

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x^{(1)\mathrm{T}} &= Q_{11}(\varepsilon_x^{\mathrm{T}} - \alpha_1\Delta T) + Q_{12}(\varepsilon_y^{\mathrm{T}} - \alpha_2\Delta T)\\ \sigma_y^{(1)\mathrm{T}} &= Q_{12}(\varepsilon_x^{\mathrm{T}} - \alpha_1\Delta T) + Q_{22}(\varepsilon_y^{\mathrm{T}} - \alpha_2\Delta T)\\ \sigma_x^{(2)\mathrm{T}} &= Q_{22}(\varepsilon_x^{\mathrm{T}} - \alpha_2\Delta T) + Q_{12}(\varepsilon_y^{\mathrm{T}} - \alpha_1\Delta T)\\ \sigma_y^{(2)\mathrm{T}} &= Q_{12}(\varepsilon_x^{\mathrm{T}} - \alpha_2\Delta T) + Q_{11}(\varepsilon_y^{\mathrm{T}} - \alpha_1\Delta T)\end{aligned}\right\} \tag{5.101}$$

式中，$\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 分别表示单向板沿纤维方向和垂直于纤维方向的热膨胀系数；$\varepsilon_x^{\mathrm{T}}$ 和 $\varepsilon_y^{\mathrm{T}}$ 为热应变，由下式给出

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^{\mathrm{T}}\\ \varepsilon_y^{\mathrm{T}}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{12} & A_{22}\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}p_x^{\mathrm{T}}\\ p_y^{\mathrm{T}}\end{Bmatrix} \tag{5.102}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}p_1^{\mathrm{T}} &= [(Q_{11}b + Q_{12}h)\alpha_1 + (Q_{12}b + Q_{22}h)\alpha_2]\Delta T\\ p_2^{\mathrm{T}} &= [(Q_{12}b + Q_{11}h)\alpha_1 + (Q_{22}b + Q_{12}h)\alpha_2]\Delta T\end{aligned}\right\} \tag{5.103}$$

从式(5.99)和式(5.100)可以求得位移场如下

$$\left.\begin{aligned}u_1 &= \varepsilon_0 x + \frac{1}{\alpha}\frac{hQ_{22}}{bQ_{11}}\left(1 - \frac{Q_{12}A_{12}}{Q_{22}A_{22}} + \frac{\sigma_x^{(2)\mathrm{T}}}{\sigma_{22}\varepsilon_0}\right)\varepsilon_0\frac{\sinh\alpha x}{\cosh\alpha s}\\ u_2 &= \varepsilon_0 x + \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{Q_{12}A_{12}}{Q_{22}A_{22}} + \frac{\sigma_x^{(2)\mathrm{T}}}{Q_{22}\varepsilon_0}\right)\varepsilon_0\frac{\sinh\alpha x}{\cosh\alpha s}\\ v_1 &= v_2 = -\frac{A_{12}}{A_{22}}\varepsilon_0 y\end{aligned}\right\} \tag{5.104}$$

其中

$$\alpha^2 = \frac{G_{\mathrm{m}}}{d_0}\left(\frac{1}{hQ_{22}} + \frac{1}{bQ_{11}}\right) \tag{5.105}$$

从式(5.104)和式(5.105)中，求得的应力和应变分量是

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x^{(1)\mathrm{M}} &= \varepsilon_0\left[1 + \frac{hQ_{22}}{bQ_{11}}\left(1 - \frac{Q_{12}A_{12}}{Q_{22}A_{22}} + \frac{\sigma_x^{(2)\mathrm{T}}}{Q_{22}\varepsilon_0}\right)\frac{\cosh\alpha x}{\cosh\alpha s}\right]\\ \varepsilon_x^{(2)\mathrm{M}} &= \varepsilon_0\left[1 - \left(1 - \frac{Q_{12}A_{12}}{Q_{22}A_{22}} + \frac{\sigma_x^{(2)\mathrm{T}}}{Q_{22}\varepsilon_0}\right)\frac{\cosh\alpha x}{\cosh\alpha s}\right]\\ \varepsilon_{yx}^{(1)\mathrm{M}} &= \varepsilon_{yx}^{(2)\mathrm{M}} = -\frac{A_{12}}{A_{22}}\varepsilon_0, \quad \gamma_{xy}^{(1)\mathrm{M}} = \gamma_{xy}^{(2)\mathrm{M}} = 0\end{aligned}\right\} \tag{5.106}$$

和

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x^{(1)\mathrm{M}} &= Q_{11}\varepsilon_0\left[1 - \frac{Q_{12}A_{12}}{Q_{11}A_{22}} + \frac{hQ_{22}}{bQ_{11}}\left(1 - \frac{Q_{12}A_{12}}{Q_{22}A_{22}} + \frac{\sigma_x^{(2)\mathrm{T}}}{Q_{22}\varepsilon_0}\right)\frac{\cosh\alpha x}{\cosh\alpha s}\right]\\ \sigma_x^{(2)\mathrm{M}} &= Q_{22}\varepsilon_0\left(1 - \frac{Q_{12}A_{12}}{Q_{22}A_{22}}\right)\left(1 - \frac{\cosh\alpha x}{\cosh\alpha s}\right) - \sigma_x^{(2)\mathrm{T}}\frac{\cosh\alpha x}{\cosh\alpha s}\\ \sigma_y^{(1)\mathrm{M}} &= Q_{12}\varepsilon_0\left[1 - \frac{Q_{22}A_{12}}{Q_{12}A_{22}} + \frac{hQ_{22}}{bQ_{11}}\left(1 - \frac{Q_{12}A_{12}}{Q_{22}A_{22}} + \frac{\sigma_x^{(2)\mathrm{T}}}{Q_{22}\varepsilon_0}\right)\frac{\cosh\alpha x}{\cosh\alpha s}\right]\\ \sigma_y^{(2)\mathrm{M}} &= Q_{12}\varepsilon_0\left[1 - \frac{Q_{11}A_{12}}{Q_{12}A_{22}} - \left(1 - \frac{Q_{12}A_{12}}{Q_{22}A_{22}} + \frac{\sigma_x^{(2)\mathrm{T}}}{Q_{22}\varepsilon_0}\right)\frac{\cosh\alpha x}{\cosh\alpha s}\right]\end{aligned}\right\} \tag{5.107}$$

具有间距为 $2s$ 的横向裂纹的正交叠层板的完整的应力分布应是热残余应力式(5.101)与力学应力式(5.107)之和。注意,由于所假定位移的限制,未能满足在裂纹附近沿 $y$ 方向的平衡关系(即 $b\sigma_y^{(1)M}+h\sigma_y^{(2)M}=0$)。

沿荷载方向的拉伸应力(它们是控制叠层板的初始破坏和最终破坏的应力)由下式给出

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x^{(1)} &= \sigma_x^{(1)M}+\sigma_x^{(1)T}=\sigma_1+\frac{h}{b}\sigma_2\frac{\cosh\alpha x}{\cosh\alpha s}\\ \sigma_x^{(2)} &= \sigma_x^{(2)M}+\sigma_x^{(2)T}=\sigma_2\left(1-\frac{\cosh\alpha x}{\cosh\alpha s}\right)\end{aligned}\right\} \tag{5.108}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= Q_{11}\varepsilon_0\left(1-\frac{Q_{12}A_{12}}{Q_{11}A_{22}}\right)-\frac{h}{b}\sigma_x^{(2)T}\\ \sigma_2 &= Q_{22}\varepsilon_0\left(1-\frac{Q_{12}A_{12}}{Q_{22}A_{22}}\right)+\sigma_x^{(2)T}\end{aligned}\right\} \tag{5.109}$$

### 5.7.2 正交叠层板的破坏分析

1. 90°层的初始破坏

假定单向板的横向拉伸强度服从两参数韦布尔累积分布函数,即

$$F(\sigma)=1-\exp\left[-\int_V\left(\frac{\sigma}{\sigma_{90}}\right)^{\beta_{90}}\mathrm{d}v\right] \tag{5.110}$$

式中,$\sigma_{90}$和 $\beta_{90}$分别为韦布尔尺度参数和形状参数;$V$ 为 90°层的体积。这样,在式(5.108)的应力 $\sigma_x^{(2)}$ 作用下 90°层的破坏概率可由下式给出

$$F(\sigma_2)=1-\exp\left[-V\delta_1\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{90}}\right)^{\beta_{90}}\right] \tag{5.111}$$

其中

$$\delta_1=\frac{1}{s}\int_0^s\left(1-\frac{\cosh\alpha x}{\cosh\alpha s}\right)^{\beta_{90}}\mathrm{d}x \tag{5.112}$$

$\delta_1$ 反映了关于 90°层强度的应力非均匀性效应。式(5.112)中的 $V=ltw$,其中 $l(=2s)$,$t(=2h)$和 $w$ 分别是两相邻裂纹之间的长度和 90°层的厚度和宽度。必须指出,两相邻裂纹之间的长度用 $l$ 来表示是因为注意力主要集中在两条现有裂纹之间新裂纹的出现。Manders 等已经使用了类似于式(5.111)的表达式。

假定,在 50%的破坏概率下,某条新裂纹发生在间距为 $2s$ 的两条现有裂纹的正中间。做出现有两条相邻裂纹等间距的假定仅是为了简化应力重新分布和破坏概率的计算。

在 90°层中相应于该新裂纹发生的应力是

$$\sigma_2=\sigma_{90}\left(\frac{\ln 2}{ltw\delta_1}\right)^{1/\beta_{90}} \tag{5.113}$$

类似地，对于具有体积 $V_0=l_0t_0w$ 的 90°层板，在拉伸荷载作用下，其破坏应力是

$$\sigma_2^0=\sigma_{90}\left(\frac{\ln 2}{l_0t_0w}\right)^{1/\beta_{90}} \tag{5.114}$$

式(5.113)除以式(5.114)，有

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_2^0}=\left(\frac{l_0t_0}{2st\delta_1}\right)^{1/\beta_{90}} \tag{5.115}$$

$l_0$，$t_0$，$\beta_{90}$和 $\sigma_2^0$ 的值可以从实验室尺寸试样中确定。这样，就可以获得应力 $\sigma_2$ 与裂纹间距 $2s$ 之间的关系。必须指出，我们已经假定形状参数 $\beta_{90}$对各种长度和厚度均为常数，尽管它可能随试样尺寸的变化而有所不同。当裂纹间距 $2s$ 相当大时，那么 $\delta_1\approx1$，式(5.115)则表明，在均匀应力(无应力集中)作用下的简单的尺寸效应。

2. *多级裂纹增长*

下面将给出 90°层的多级开裂期间正交叠层板中的应力-应变关系。首先，从式(5.104)中获得正交叠层板的平均轴向应变

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_x&=\left(\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x}\right)_{\text{平均}}=\frac{u_1(s)}{s}\\&=\frac{\bar{\sigma}_x}{\bar{E}_x}\left[1+\frac{hQ_{22}}{bQ_{11}}\left(1-\frac{Q_{12}A_{12}}{Q_{22}A_{22}}\right)\frac{1}{\alpha s}\tanh\ \alpha s\right]+\frac{h\sigma_x^{(2)\mathrm{T}}}{bQ_{11}}\frac{1}{\alpha s}\tanh\alpha s\end{aligned} \tag{5.116}$$

这个方程给出了轴向应变、轴向应力及裂纹间距之间的关系，从式(5.115)和式(5.109)中也可以获得轴向应力和裂纹间距之间的关系如下

$$\bar{\sigma}_x=\frac{\bar{E}_x}{Q_{22}\left(1-\dfrac{Q_{12}A_{12}}{Q_{22}A_{22}}\right)}\left[\sigma_2^0\left(\frac{l_0t_0}{2st\delta_1}\right)^{1/\beta_{90}}-\sigma_x^{(2)\mathrm{T}}\right] \tag{5.117}$$

对于某一给定的 $\bar{\sigma}_x$ 值，从式(5.117)确定裂纹间距 $2s$，然后，从式(5.116)就能求得轴向应变。

横向开裂的两种有趣情形是 $s\to\infty$和 $s\to0$。当 $s\to\infty$时，有

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{\alpha s}\tanh\alpha s=0$$

及

$$\bar{\varepsilon}_x=\frac{\bar{\sigma}_x}{\bar{E}_x} \tag{5.118}$$

这一结果代表了初始的应力-应变关系。当 $s\to0$ 时，有

$$\lim_{s\to0}\frac{1}{\alpha s}\tanh\alpha s=1$$

及

$$\bar{\varepsilon}_x=\frac{\bar{\sigma}_x}{\bar{E}_x}\left[1+\frac{hQ_{22}}{bQ_{11}}\left(1-\frac{Q_{12}A_{12}}{Q_{22}A_{22}}\right)\right]+\frac{h\sigma_x^{(2)\mathrm{T}}}{bQ_{11}} \tag{5.119}$$

这一方程给出了当正交叠层板的刚度缩减至仅为 0°层板的刚度时的应力与应变之间的关系。

其次，考虑 90°层初始开裂时的应变。令式(5.116)中的 $\tanh\alpha s/\alpha s\to 0$ 及式(5.117)中的 $2s=l_0$ 和 $\delta_1=1$，可以获得

$$\bar{\varepsilon}_x=\frac{1}{Q_{22}\left(1-\dfrac{Q_{12}A_{12}}{Q_{22}A_{22}}\right)}\left[\sigma_2^0\left(\frac{t_0}{t}\right)^{1/\beta_{90}}-\sigma_x^{(2)\mathrm{T}}\right] \tag{5.120}$$

这个方程给出了 90°层的初始开裂应变，同时考虑了热残余应力和泊松收缩效应。在该式的推导中，也假定了 0°层板未发生破坏。

3. 正交叠层板的最终破坏

正交叠层板在承受应力期间，如果在 0°层中的应力 $\sigma_y^{(1)}$ 是足够大，则泊松收缩效应可能导致纵向劈裂。Bailey 等(1979)指出，对于玻璃/环氧复合材料，通常会发生径向劈裂，而对于碳/环氧复合材料，则未观察到径向劈裂现象。考虑到本节仅研究碳/环氧复合材料，因此，对径向劈裂的问题在此处不作讨论。

考虑正交叠层板的最终破坏归因于 0°层的破坏。0°层沿纤维方向的强度特性也假定服从类似于式(5.110)的两参数韦布尔分布函数。于是，0°层在式(5.108)给出的应力 $\sigma_x^{(1)}$ 作用下的破坏概率是

$$F(\sigma_1)=1-\exp\left[-wt\int_0^{l_0}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^{\beta_0}\left(1+\frac{h}{b}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\frac{\cosh\alpha x}{\cosh\alpha s}\right)^{\beta_0}\mathrm{d}x\right] \tag{5.121}$$

式中，$\sigma_0$ 和 $\beta_0$ 分别表示关于 0°层强度分布的尺度参数和形状参数。假定 0°层在 50%的破坏概率下发生破坏，于是

$$\sigma_1=\sigma_0\left(\frac{\ln 2}{wtl_0\delta_2}\right)^{1/\beta_0} \tag{5.122}$$

其中

$$\delta_2=\frac{1}{s}\int_0^s\left(1+\frac{h}{b}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\frac{\cosh\alpha x}{\cosh\alpha s}\right)^{\beta_0}\mathrm{d}x \tag{5.123}$$

$\delta_2$ 反映了关于 0°层强度的应力非均匀性效应。类似地，对于具有体积 $V_1=l_0t_0w$ 的某一 0°层，在均匀应力 $\sigma_1^0$

$$\sigma_1^0=\sigma^0\left(\frac{\ln 2}{wt_0l_0}\right)^{1/\beta_0} \tag{5.124}$$

作用下首先发生破坏。从式(5.122)和式(5.124)中，可以获得

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_1^0}=\left(\frac{t_0}{t\delta_2}\right)^{1/\beta_0} \tag{5.125}$$

其中，0°层的厚度是 $t=2b$，而且 0°层将在长为 $l_0$ 的最弱点处发生破坏。式(5.125)表示关于 0°层强度的尺寸效应。

从上述所建立的关系式中，可以确定初始破坏强度、最终破坏强度及直至正交叠层板断裂的应力-应变关系。

4. 结果和讨论

为了模拟碳/环氧正交叠层板，使用下列材料常数：$E_{11}=137$ GPa，　$E_{22}=$

10.8 GPa，$\nu_{12}=0.3$，$\nu_{21}=E_{22}\nu_{12}/E_{11}$，$G_m/d_0=9.8\times10^4$ GPa/m，$\alpha_1=0/℃$，$\alpha_2=25\times10^{-6}/℃$，$\Delta T=-150℃$；对于 $l_0=100$ mm，$t_0=0.125$ mm，$\sigma_1^0=1570$ MPa，$\beta_0=20$，$\sigma_2^0=98$ MPa，$\beta_{90}=2$，$\beta_{90}=4$ 或 $\beta_{90}=6$。

在算例中，讨论了[0/90/0]和[90/0/90]两种正交叠层板的破坏特性，并与实验结果进行了比较。[90/0/90]叠层的分析与[0/90/0]的分析类似。对于$[0_n/90_{2m}/0_n]$和$[90_m/0_n/90_m]$叠层，控制方程可以写成同一形式

$$\left.\begin{aligned} Q_{11}\frac{d^2u_1}{dx^2}+\frac{G_m}{bd_0}(u_2-u_1)=0\\ Q_{22}\frac{d^2u_2}{dx^2}+\frac{G_m}{hd_0}(u_2-u_1)=0\end{aligned}\right\} \tag{5.126}$$

式中，$u_1$ 和 $b$ 分别为 $n$ 板 0°层的位移和厚度；$u_2$ 和 $h$ 分别为 $m$ 板 90°层的位移和厚度。这意味着 90°层破坏后的应力重新分布对于两种叠层均相同。可是，在这两种叠层板中 90°层的破坏概率是不同的。如果假定$[90_m/0_n/90_m]$中上下 90°层均在同一位置发生破坏，那么，破坏特性就是厚度为 $h$ 的 90°层的破坏特性；在$[0_n/90_{2m}/0_n]$叠层中，破坏特性则是厚度为 $2h$ 的 90°层的破坏特性。因此，$[0_n/90_{2m}/0_n]$叠层发生多级破坏时的荷载比$[90_m/0_n/90_m]$叠层的低。

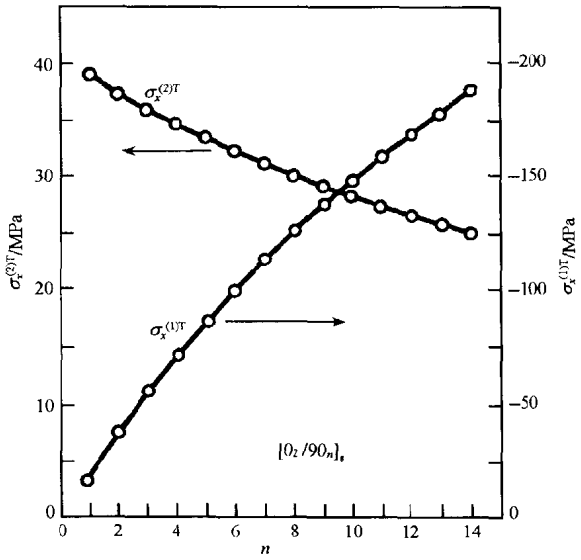



图 5.26 $[0_2/90_n]_s$ 的热残余应力 $\sigma_x^{(1)T}$ 和 $\sigma_x^{(2)T}$ 与横向板的层数 $n$ 的关系

图 5.26 示出了$[0_2/90_n]_s$叠层的热残余应力 $\sigma_x^{(1)T}$ 和 $\sigma_x^{(2)T}$ 与横向板的层数的关系。图 5.27 给出了式(5.120)中 90°层的初始开裂应变的理论结果与实验结果的比较。对于[0/90/0]叠层，90°层的初始开裂应变随其厚度的增加是显著的(图 5.27(a)，(b))；对于[90/0/90]叠层，90°层的初始开裂应变对 0°层的厚度则是不大敏感的(图 5.27(c))。当 $\beta_{90}=4$(图 5.27(a))和 $\beta_{90}=6$(图 5.27(b))时，理论分析与

实验结果相当吻合。如果90°层强度的离散性较高，例如 $\beta_{90}=2$ 的情形，仅因热残余应力就可导致横向开裂(正如在较厚的90°层中经常观察到的那样)。在图5.27(b)，(c)中，也示出了基于能量概念的理论结果。

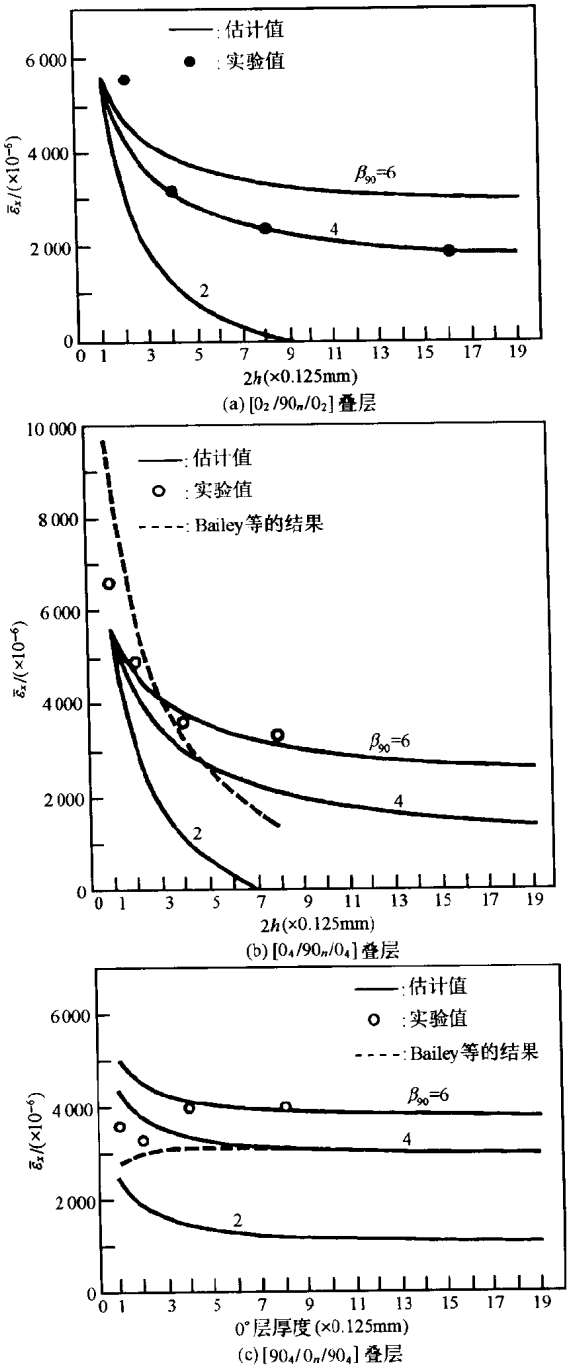
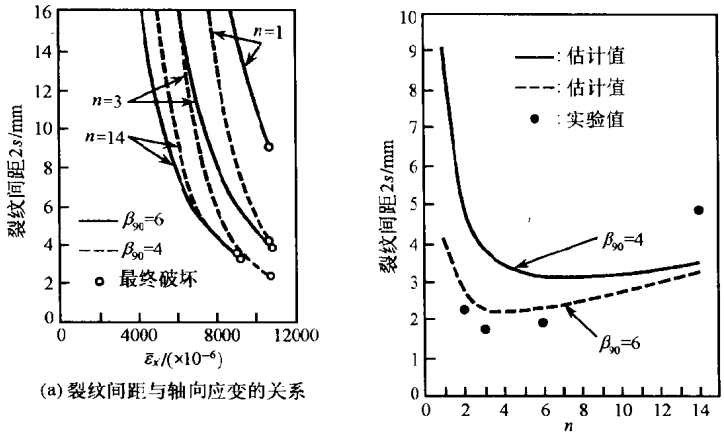



图5.27　碳/环氧正交叠层板的初始开裂应变




(a) 裂纹间距与轴向应变的关系

(b) 最终裂纹间距

图 5.28 $[0_2/90_n]_s$ 叠层中 90°层的裂纹间距

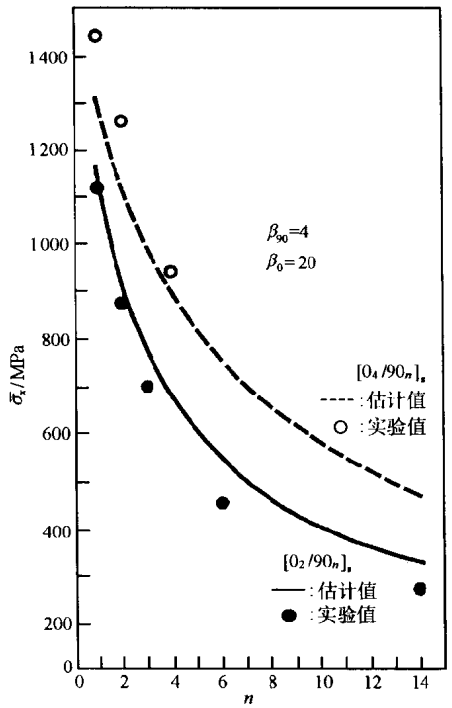



图 5.29 正交叠层板的最终破坏强度

图 5.28(a)表明，横向裂纹间距与轴向应变的关系对 90°层的形状参数是敏感的。此外，在最终破坏时的裂纹间距对形状参数也是敏感的，而且此裂纹尚未达到饱和状态。与此相反，最终破坏应变对 90°层的形状参数是不敏感的。图 5.28(b)示出了$[0_2/90_n]_s$ 叠层的最终裂纹间距与 $n$ 的关系，其中小黑圆为实验值。对于 $n=1$，除了由于热效应所产生的裂纹之外，在荷载作用下是观察不到裂纹的。图中的分析结果表明，当 90°层的厚度较小($n=1$ 或 2)时，裂纹数量也较小；当 90°层的厚度较大时，裂纹间距随 90°层厚度的增加而增加。上述分析可以定性地估计这种趋势。

图 5.29 示出了$[0_2/90_n]_s$ 和$[0_4/90_n]_s$ 叠层板的最终破坏强度，理论值与实验结果相当吻合。当 90°层的厚度增加时，对于$[0_2/90_n]_s$ 叠层，估计值比实验结果高，其原因也许是由于剪滞模型的近似性。

图 5.30 示出了最终破坏应变和初始开裂应变。当 90°层的厚度较小时，初始开裂应变增加，而最终破坏应变随 90°层厚度的变化则较小。

图 5.31 示出了$[90_4/0_n]_s$ 叠层的最终破坏强度，理论值与实验结果较为吻合。图 5.32 示出了$[0_2/90_n]_s$ 叠层直到断裂时的应力-应变关系。在碳/环氧正交叠层板

中，由于 90°层的破坏而导致的刚度降低是较小的，因而，在玻璃纤维复合材料中常见的拐点在此处未出现。

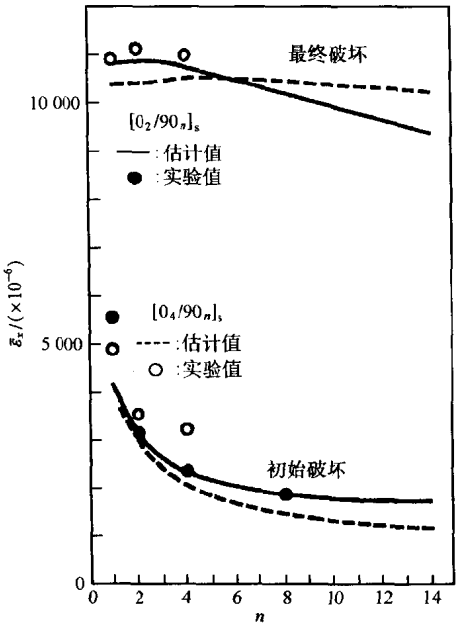



图 5.30　正交叠层板的最终破坏应变和初始开裂应变

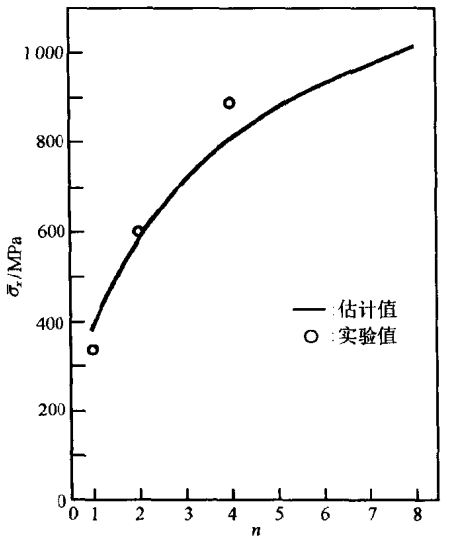



图 5.31　$[90_4/0_n]_s$ 正交叠层的最终破坏强度

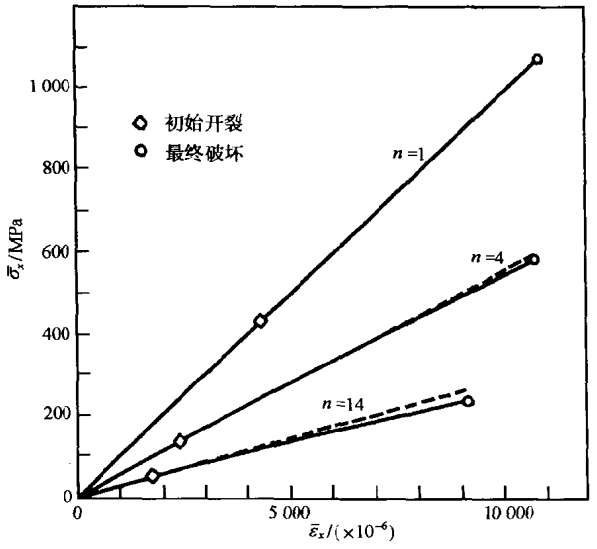



图 5.32　$[0_2/90_n]_s$ 正交叠层的应力-应变关系

## 5.8 正交叠层板的最终破坏问题

从上述可见，关于复合材料正交叠层板拉伸破坏问题的现有研究，主要侧重于研究叠层板 90°层中裂纹的起始和演化、出现多级破坏至裂纹饱和(即所谓的**特征损伤状态**)，形成了多种理论和相应的计算方法。但对特征损伤状态出现后 0°层的细观破坏问题(如层间界面破坏、纤维累积断裂至破坏等)的研究，目前少有报道，其原因在于叠层中 90°层的基体开裂、层间界面破坏及 0°层的纤维逐步断裂所导致的应力重新分布问题的求解相当困难，也未建立便于分析其破坏过程的细观统计力学模型。下面将介绍由曾庆敦等(1994，1999)对上述问题的研究工作。

### 5.8.1 应力重新分布

考虑如图 5.33(a)所示的在 0°方向受拉伸荷载作用的$[0_n/90_m]_s$正交叠层板。随着荷载的逐步增加，在 90°层内首先产生平行于该层纤维方向的基体开裂，裂纹数量随荷载的增加而增加，直到一个饱和状态。特征损伤状态的出现标志着基体开裂初期阶段的结束，随后的进一步加载将伴随其他损伤模式的出现。通常，正交叠层板的最后破坏始于 0°层中的部分纤维的逐步断裂，此种情形的细观应力重分布可采用剪滞理论来求解。

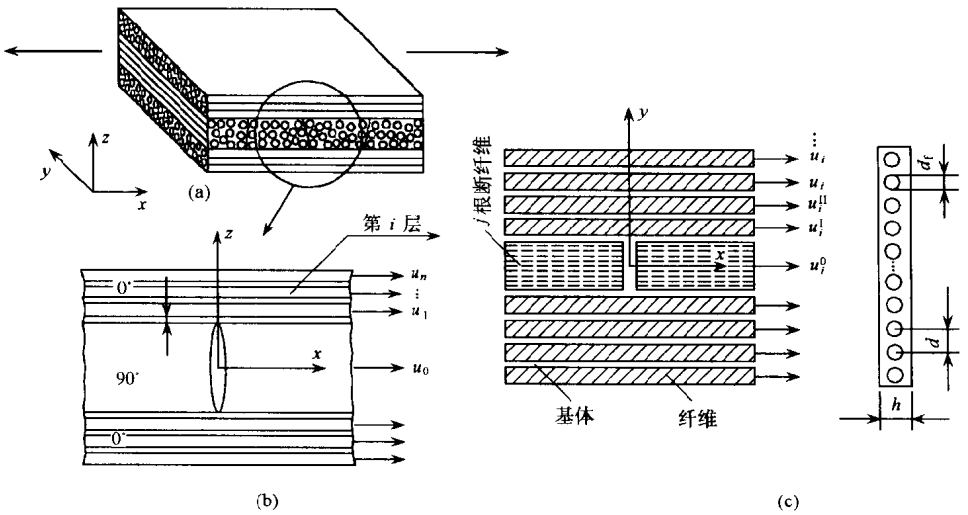



图 5.33 正交叠层板和应力重新分布分析模型

从图 5.33(a)中取出如图 5.33(b)所示的剪滞分析模型。设层间传递切应力的树脂薄层厚度为 $d_0$，各单层厚度为 $h$。为简便起见，将此剪滞模型中发生横向开裂的 90°层视为一个等效层，此层的位移用 $u_0$ 表示，各 0°层的位移分别用 $u_1, u_2, \cdots,$

$u_i,\cdots,u_n$ 表示。

为了进一步求解 0°层中由于纤维断裂而导致的应力重分布，现再从图 5.33(b)中取出如图 5.33(c)所示的第 $i$ 层进行分析。设该层中有 $j$ 根纤维发生断裂，构成了所谓的**断裂核**，参照 Zweben(1974)，其位移用 $u_i^0$ 表示。考虑到应力集中通常只在靠近断口处显著，稍远处即迅速消弱，故可认为在此层内，只有邻近断裂核的左右各两根纤维承担其应力扰动，其位移分别用 $u_i^{\mathrm{I}}$，$u_i^{\mathrm{I}}$ 表示，而同层的其他完整纤维不受该断裂核的影响，其位移仍然为 $u_i$。在建立第 $i$ 层剪滞方程时，除需考虑同层纤维基体切应力的作用，还应考虑层间基体切应力的影响。采用图 7.33(c)所示坐标系，列出的剪滞平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}
&jE_fA_f\frac{d^2u_i^0}{dx^2}+2\frac{G_mh}{d}(u_i^{\mathrm{I}}-u_i^0)-\frac{jG_md}{d_0}(u_i-u_{i-1})+\frac{jG_md}{d_0}(u_{i+1}-u_i)=0\\
&E_fA_f\frac{d^2u_i^{\mathrm{I}}}{dx^2}+\frac{G_mh}{d}(u_i^{\mathrm{I}}-2u_i^{\mathrm{I}}+u_i^0)-\frac{G_md}{d_0}(u_i-u_{i-1})+\frac{G_md}{d_0}(u_{i+1}-u_i)=0\\
&E_fA_f\frac{d^2u_i^{\mathrm{I}}}{dx^2}+\frac{G_mh}{d}(u_i-2u_i^{\mathrm{I}}+u_i^{\mathrm{I}})-\frac{G_md}{d_0}(u_i-u_{i-1})+\frac{G_md}{d_0}(u_{i+1}-u_i)=0
\end{aligned}\right\}\tag{5.127}$$

式中的第 3 和第 4 项表示层间切应力的影响。对于外表面单层($i=n$)，应将第 4 项去掉。

式(5.127)中的 $u_i(i=1,2,\cdots,n)$ 可以从图 5.33(b)所示的分析模型中求出。根据剪滞假定，忽略基体承受的拉力，并考虑对称性，有

$$\left.\begin{aligned}
&E_{22}A_{22}\frac{d^2u_0}{dx^2}+2\frac{G_mW}{d_0}(u_1-u_0)=0\\
&E_{11}A_{11}\frac{d^2u_i}{dx^2}+\frac{G_mW}{d_0}(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})=0,\quad i=1,2,\cdots,n-1\\
&E_{11}A_{11}\frac{d^2u_n}{dx^2}+\frac{G_mW}{d_0}(u_{n-1}-u_n)=0
\end{aligned}\right\}\tag{5.128}$$

式中，$W$ 为试样宽度(如单层中等间距平行排列的纤维根数为 $N$，则有 $W=Nd$)；$E_{11}$和 $E_{22}$分别为单向板的纵向和横向有效模量；$A_{11}(=hNd)$和 $A_{22}(=2mhNd)$分别为 0°单层和 90°等效层的横截面面积。

设 $E_{11}\approx E_fV_f(V_f=A_f/(hd))$，则 $E_{11}A_{11}\approx E_fV_fhNd=E_fA_fN$，再引入无量纲参量

$$\left.\begin{aligned}
&u_i=\sigma_fA_f\sqrt{h/(E_fA_fG_md)}U_i=\sigma_fh\sqrt{V_f/(E_fG_m)}U_i,\quad i=0,1,\cdots,n\\
&u_i^k=\sigma_fh\sqrt{V_f/(E_fG_m)}U_i^k,\quad k=0,\mathrm{I},\mathrm{II};\qquad i=1,2,\cdots,n\\
&x=h\sqrt{E_fV_f/G_m}\xi,\quad h/d=D,\quad d/d_0=D_0
\end{aligned}\right\}\tag{5.129}$$

式中，$\sigma_f$ 为正交叠层板中 0°层的远场纤维拉伸应力。式(5.127)简化为

$$\left.\begin{aligned}
&j\frac{\mathrm{d}^2U_i^0}{\mathrm{d}\xi^2}+2D^2(U_i^{\mathrm{I}}-U_i^0)-DD_0j(U_i-U_{i-1})+DD_0j(U_{i+1}-U_i)=0\\
&\frac{\mathrm{d}^2U_i^{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}\xi^2}+D^2(U_i^{\mathrm{I}}-2U_i^{\mathrm{I}}+U_i^0)-DD_0(U_i-U_{i-1})+DD_0(U_{i+1}-U_i)=0\\
&\frac{\mathrm{d}^2U_i^{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}\xi^2}+D^2(U_i-2U_i^{\mathrm{I}}+U_i^{\mathrm{I}})-DD_0(U_i-U_{i-1})+DD_0(U_{i+1}-U_i)=0
\end{aligned}\right\} \tag{5.130}$$

相应的边界条件为

$$\left.\frac{\mathrm{d}U_i^0}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=0}=0,\quad U_i^{\mathrm{I}}|_{\xi=0}=U_i^{\mathrm{I}}\Big|_{\xi=0}=0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}U_i^k}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=\infty}=1,\quad k=0,\mathrm{I},\mathrm{II} \tag{5.131}$$

式(5.128)简化为

$$\left.\begin{aligned}
&R\frac{\mathrm{d}^2U_0}{\mathrm{d}\xi^2}+DD_0(U_1-U_0)=0\\
&\frac{\mathrm{d}^2U_i}{\mathrm{d}\xi^2}+DD_0(U_{i+1}-2U_i+U_{i-1})=0,\quad i=1,2,\cdots,n-1\\
&\frac{\mathrm{d}^2U_n}{\mathrm{d}x^2}+DD_0(U_{n-1}-U_n)=0
\end{aligned}\right\} \tag{5.132}$$

相应的边界条件为

$$\left.\frac{\mathrm{d}U_i}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=0}=0(\text{断裂层}),\quad U_i|_{\xi=0}=0(\text{完整层}),\quad \left.\frac{\mathrm{d}U_i}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=\infty}=1(\text{所有层}) \tag{5.133}$$

式(5.132)中

$$\begin{aligned}
R&=\frac{E_{22}A_{22}}{E_fA_f}\cdot\frac{d}{2W}=\frac{E_{22}\cdot 2mhW}{E_fA_f}\cdot\frac{d}{2W}=m\frac{E_{22}}{E_fA_f/(dh)}\\
&=m\frac{E_{22}}{E_fV_f}\approx m\frac{E_{22}}{E_{11}}
\end{aligned} \tag{5.134}$$

从式(5.132)和式(5.133)中，可以求得 $U_i(\xi)(i=0,1,2,\cdots,n)$，将其代入式(5.130)并与式(5.131)一起，即可求得 $U_i^k(\xi)(k=0,\mathrm{I},\mathrm{II})$。

以$[0_n/90_m]_s$正交叠层复合材料为例，计算中可取 $D=D_0=1$。设 $K_{i,0}$表示当 0 到 $i-1$ 层破坏后第 $i$ 层纤维的应力集中因子；$K_{i,0}$表示当 0 到 $i-1$ 层发生破坏，并且第 $i$ 层有 $j$ 根纤维已断形成断裂核时，第 $i$ 层中最邻近该断裂核的纤维在 $\xi=0$ 处的应力集中因子。它们分别由下式求得

$$K_{i,0}=\left.\frac{\mathrm{d}U_i(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=0},\quad K_{i,j}=\left.\frac{\mathrm{d}U_i^{\mathrm{I}}(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=0},\quad i\neq 0;\qquad j=1,2,\cdots \tag{5.135}$$

### 5.8.2 层间界面破坏对应力集中的影响

上面仅讨论了在弹性情形下正交叠层板最终破坏过程中的细观应力重新分布问题。事实上，此类复合材料当 90°层发生破坏后，各单层板之间可能发生层间界面破坏，下面主要讨论这两种破坏情形：①当 90°层发生横向开裂后，90°层与 0°层之间存在关于中央裂纹对称的层间界面破坏，并在第 $i(1,2,\cdots,n)$0°层出现 $j$ 根断纤维的情形。②当 90°层和其紧邻的 0°层均发生破坏后，在 0°层的第 1 和第二 层之间存在关于中央裂纹对称的层间界面破坏，并在第 $i(1,2,\cdots,n)$0°层出现 $j$ 根断纤维的情形。

对于情形①，从图 5.34(a)中取出如图 5.34(b)所示的剪滞分析模型。至于情形②，剪滞模型(见图 5.34(c))的分析方法类似于情形①，在此不再赘述。

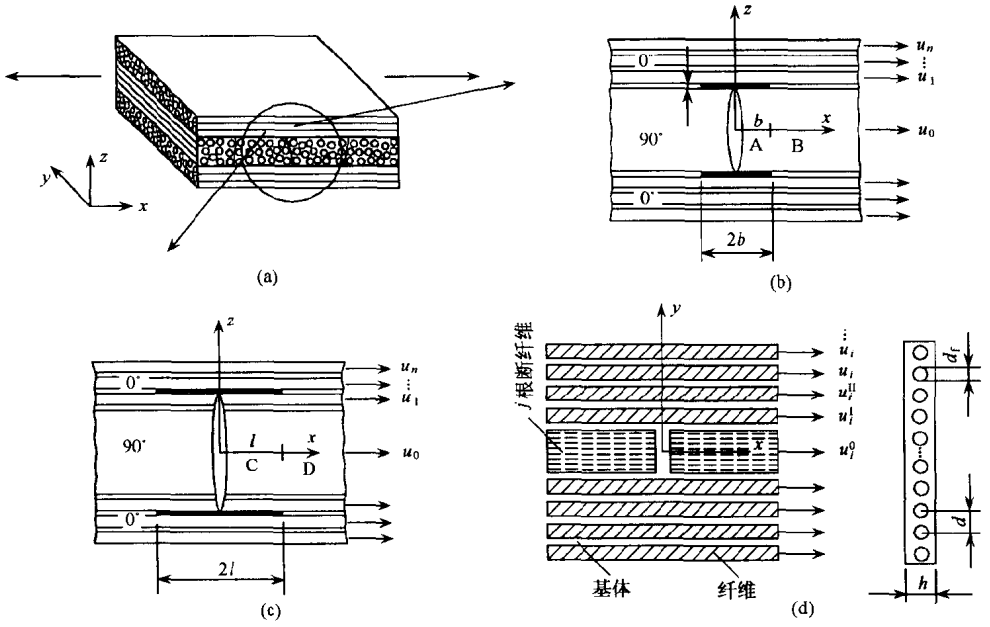



图 5.34　正交叠层板和计及层间界面破坏的应力重新分布分析模型

为了便于求解，将模型再分为域 A($0\leqslant x\leqslant b$)和域 B($b\leqslant x<\infty$)(情形①)及域 C($0\leqslant x\leqslant l$)和域 D($l\leqslant x<\infty$)(情形②)。这里，$b$ 和 $l$ 分别为情形①和情形②的层间界面损伤区的半长度，且仅考虑模型的右边部分(对称)。

对情形①，考虑 90°层与 0°层之间存在关于中央裂纹对称的层间界面破坏。假定作用在此破坏区内的切应力是常数且等于 $\eta\tau_s$，其中 $\eta(0\leqslant\eta\leqslant1)$为剪切参数，$\tau_s$ 为基体或界面的剪切强度。

为计算方便，需引入式(5.129)所示的无量纲项，此外，尚需引入下列无量纲量

$$b=h\sqrt{E_fV_f/G_m}\,\bar{b},\quad l=h\sqrt{E_fV_f/G_m}\bar{l},\quad \tau_s=\sigma_f\sqrt{G_mV_f/E_f}\bar{\tau}_s \tag{5.136}$$

下面仅列出无量纲的剪滞平衡方程。令 $D=D_0=1$，对情形①，由图 5.34(b)的域 A($0\leqslant\xi\leqslant\bar{b}$)列出的无量纲剪滞平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}
&R\frac{\mathrm{d}^2U_0^{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}\xi^2}-\eta\bar{\tau}_{\mathrm{s}}=0\\
&\frac{\mathrm{d}^2U_1^{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}\xi^2}+(U_2^{\mathrm{A}}-U_1^{\mathrm{A}})=0\\
&\frac{\mathrm{d}^2U_r^{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}\xi^2}+(U_{r+1}^{\mathrm{A}}-2U_r^{\mathrm{A}}+U_{r-1}^{\mathrm{A}})=0,\quad r=2,3,\cdots,n-1\\
&\frac{\mathrm{d}^2U_n^{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}\xi^2}+(U_{n-1}^{\mathrm{A}}-U_n^{\mathrm{A}})=0
\end{aligned}\right\}\tag{5.137}$$

对于情形②，由图 5.34(c)中的域 C($0\leqslant\xi\leqslant\bar{l}$)，考虑 0°层的第 1 和第 2 层之间存在关于中央裂纹对称的层间界面破坏，同理可列出其无量纲剪滞平衡方程如下

$$\left.\begin{aligned}
&R\frac{\mathrm{d}^2U_0^{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}\xi^2}+(U_1^{\mathrm{C}}-U_0^{\mathrm{C}})=0\\
&\frac{\mathrm{d}^2U_1^{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}\xi^2}+(U_0^{\mathrm{C}}-U_1^{\mathrm{C}})-\eta\bar{\tau}_{\mathrm{s}}=0\\
&\frac{\mathrm{d}^2U_2^{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}\xi^2}+(U_3^{\mathrm{C}}-U_2^{\mathrm{C}})+\eta\bar{\tau}_{\mathrm{s}}=0\\
&\frac{\mathrm{d}^2U_r^{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}\xi^2}+(U_{r+1}^{\mathrm{C}}-2U_r^{\mathrm{C}}+U_{r-1}^{\mathrm{C}})=0,\quad r=3,4,\cdots,n-1\\
&\frac{\mathrm{d}^2U_n^{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}\xi^2}+(U_{n-1}^{\mathrm{C}}-U_n^{\mathrm{C}})=0
\end{aligned}\right\}\tag{5.138}$$

对于情形①中的域 B($\bar{b}\leqslant\xi<\infty$)和情形②中的域 D($\bar{l}\leqslant\xi<\infty$)，属完全弹性情形，其无量纲剪滞平衡方程与式(5.132)完全相同，仅将各无量纲位移量分别加上上角标 B 和 D 即可。

为了进一步求解 0°层中由于 $j$ 根纤维发生连续断裂而导致的应力重新分布，类似于图 5.33(c)建立剪滞模型，即从图 5.34(b)或图 5.34(c)中取出如图 5.34(d)所示的第 $i$ 层进行分析。当 $i=1$ 时，对情形①的域 A($0\leqslant\xi\leqslant\bar{b}$)建立的无量纲剪滞平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}
&j\frac{\mathrm{d}^2U_1^{0\mathrm{A}}}{\mathrm{d}\xi^2}+2(U_1^{\mathrm{I}\,\mathrm{A}}-U_1^{0\mathrm{A}})+j(U_2^{\mathrm{A}}-U_1^{\mathrm{A}})+j\eta\bar{\tau}_{\mathrm{s}}=0\\
&\frac{\mathrm{d}^2U_1^{\mathrm{I}\,\mathrm{A}}}{\mathrm{d}\xi^2}+(U_1^{\mathrm{I}\,\mathrm{A}}-2U_1^{\mathrm{I}\,\mathrm{A}}+U_1^{0\mathrm{A}})+(U_2^{\mathrm{A}}-U_1^{\mathrm{A}})+\eta\bar{\tau}_{\mathrm{s}}=0\\
&\frac{\mathrm{d}^2U_1^{\mathrm{I}\,\mathrm{A}}}{\mathrm{d}\xi^2}+(U_1^{\mathrm{A}}-2U_1^{\mathrm{I}\,\mathrm{A}}+U_1^{\mathrm{I}\,\mathrm{A}})+(U_2^{\mathrm{A}}-U_1^{\mathrm{A}})+\eta\bar{\tau}_{\mathrm{s}}=0
\end{aligned}\right\}\tag{5.139}$$

域 B($\bar{b}\leqslant\xi<\infty$)的无量纲剪滞平衡方程与式(5.130)当 $i=1$ 时相同，将各无量纲位移量分别加上上角标 B 即可。当 $i=2,3,\cdots,n-1$ 且不考虑层间界面破坏时，域 A($0\leqslant\xi\leqslant\bar{b}$)和域 B($\bar{b}\leqslant\xi<\infty$)的剪滞平衡方程均有相同的表达式(式(5.130))。注

意，对于表层 0°单层，即 $i=n$，应将上式的 $U_{i+1}-U_i$ 去掉。

同理可列出情形②图 5.34(d)所示模型相应的无量纲剪滞平衡方程，为节省篇幅，此处从略。

为求解上述无量纲剪滞平衡方程，需引进下列的无量纲边界条件、连续条件及剪切条件。对于图 5.34(b)，(c)有

$$\left.\begin{aligned}
&\xi=0:\ \frac{\mathrm{d}U_i^k}{\mathrm{d}\xi}=0(\text{断裂层或纤维}),\quad U_i^k=0(\text{完整层或纤维}),\quad k=\mathrm{A},\mathrm{C}\\
&\xi=\bar{b}:U_i^{\mathrm{A}}=U_i^{\mathrm{B}},\quad \frac{\mathrm{d}U_i^{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}\xi}=\frac{\mathrm{d}U_i^{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}\xi};\qquad \xi=\bar{l}:U_i^{\mathrm{C}}=U_i^{\mathrm{D}},\quad \frac{\mathrm{d}U_i^{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}\xi}=\frac{\mathrm{d}U_i^{\mathrm{D}}}{\mathrm{d}\xi}\\
&\xi=\infty:\ \frac{\mathrm{d}U_i^k}{\mathrm{d}\xi}=1,\quad k=\mathrm{B},\mathrm{D};\qquad i=0,1,2,\cdots,n\\
&\xi=\bar{b}:U_1^{\mathrm{A}}-U_0^{\mathrm{A}}=-\bar{\tau}_{\mathrm{s}};\qquad \xi=\bar{l}:U_2^{\mathrm{C}}-U_1^{\mathrm{C}}=-\bar{\tau}_{\mathrm{s}}
\end{aligned}\right\}\tag{5.140}$$

由此可求得各 $U_i^k(k=\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D})$ 及无量纲层间界面损伤区的半长度 $\bar{b}$ 和 $\bar{l}$。将其代入与图 5.35(d)对应的剪滞平衡方程，然后再由下列无量纲边界条件、连续条件及剪切条件

$$\left.\begin{aligned}
&\xi=0:\ \frac{\mathrm{d}U_i^{0k}}{\mathrm{d}\xi}=0,\quad U_i^{\mathrm{I}\,k}=U_i^{\mathrm{II}\,k}=0,\quad k=\mathrm{A},\mathrm{C}\\
&\xi=\bar{b}:U_i^{q\mathrm{A}}=U_i^{q\mathrm{B}},\quad \frac{\mathrm{d}U_i^{q\mathrm{A}}}{\mathrm{d}\xi}=\frac{\mathrm{d}U_i^{q\mathrm{B}}}{\mathrm{d}\xi}\\
&\xi=\bar{l}:U_i^{q\mathrm{C}}=U_i^{q\mathrm{D}},\quad \frac{\mathrm{d}U_i^{q\mathrm{C}}}{\mathrm{d}\xi}=\frac{\mathrm{d}U_i^{q\mathrm{D}}}{\mathrm{d}\xi},\quad q=0,\mathrm{I},\mathrm{II}\\
&\xi=\infty:\ \frac{\mathrm{d}U_i^{qk}}{\mathrm{d}\xi}=1,\quad q=0,\mathrm{I},\mathrm{II};\qquad k=\mathrm{B},\mathrm{D}\\
&\text{情形 ①}:i=1,2,\cdots,n;\qquad \text{情形 ②}:i=2,3,\cdots,n
\end{aligned}\right\}\tag{5.141}$$

据此即可求得位移函数 $U_i^{qk}(q=0,\mathrm{I},\mathrm{II};k=\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D})$。完整纤维的拉伸应力(应变)集中因子由下式求得

$$K_{i,0}=\left.\frac{\mathrm{d}U_i^k}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=0},\quad K_{i,j}=\left.\frac{\mathrm{d}U_i^{\mathrm{I}\,k}}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=0},\quad j=1,2,\cdots;\quad k=\mathrm{A},\mathrm{C}\tag{5.142}$$

### 5.8.3 最终破坏的统计分析

在特征损伤状态下的最后破坏通常取决于其最终的损伤状态。关于叠层最终破坏概率的计算，原则上应首先确定 0°每一单层的破坏概率，其次是判明各单层的所有可能的破坏次序，并计算每一种破坏次序的概率，最后综合得到叠层破坏的概率。然而，采用此法非常繁琐复杂，而且处在叠层中的单层板的破坏也不是一个明确的概念。为此，我们将图 4.12 所示的随机扩大临界核理论进行推广，并采用一种较为简化的计算方法：首先，定义 0°某一单层中至少出现一个随机扩大临界裂

纹核时，该层就发生破坏(其中可包括多级破坏)；然后，将0°所有单层的破坏定义为叠层的破坏；通过考虑0°各单层的占优势的破坏过程(取决于应力集中的大小)，就可以获得叠层最终破坏的概率。具体步骤如下。

1) 假定叠层中的90°层已发生顺纤维的基体裂纹，由前述的剪滞分析搜索出承受应力集中最大的某一0°单层，显然，此层的纤维较易发生断裂。应用随机临界核理论(见4.5节)，可求出此层的破坏概率分布函数。

2) 假定前述的0°单层已发生破坏，重新计算应力重新分布，又可搜索出承受应力集中最大的另一0°单层，并求出其破坏概率分布函数。

3) 重复以上步骤，直至计算完所有的0°单层，再由计算条件概率的方法，求出叠层最终破坏的概率分布函数。

由上述步骤即可求得$[0_n/90_m]_s$叠层板最终破坏的概率分布函数为

$$G(\sigma_f) = 1 - [1 - P_1(\sigma_f)P_2(\sigma_f)\cdots P_{n-1}(\sigma_f)P_n(\sigma_f)]^2 \tag{5.143}$$

式中，$\sigma_f$为正交叠层板中0°层的远场纤维拉伸应力；$P_1(\sigma_f)$为90°等效层最邻近的0°单层的破坏概率分布函数；$P_2(\sigma_f)$为90°等效层和最邻近的0°单层均发生破坏的条件下，第2(0°)单层的破坏概率分布函数，其他如此类推。

根据4.5节的随机临界核理论，类似地可写出第$i$层中至少形成一个如图4.12所示的随机临界核的概率分布函数(即第$i$层的破坏概率分布函数)为(式(4.114))

$$P_i(\sigma_f) = 1 - [1 - H_i(\sigma_f)]^{m_i} \tag{5.144}$$

其中

$$H_i(\sigma_f) = 2^{r_i-2}F(K_{i,0}\sigma_f)\left\{\prod_{j=1}^{r_i-2}F(K_{i,j}\sigma_f)[1 - F(K_{i,j}\sigma_f)]\right\} \times F(K_{r_i-1,j}\sigma_f)[2 - F(K_{r_i-1,j}\sigma_f)] \tag{5.145}$$

为第$i$层中发生$r_i$(临界核中的纤维临界断裂数)根纤维连续断裂的概率，而

$$m_i = \mathrm{Int}\left[\frac{LN}{r_i\delta_{r_i-1}}\right] \quad 或 \quad m_i = \mathrm{Int}\left[\frac{LN}{(r_i+1)\delta_{r_i-1}}\right] \tag{5.146}$$

为第$i$层中最多可能形成的随机临界核个数，$L$为试样长度，Int表示取整数。

取拔出长度的2倍作为统计分析中的无效长度。考虑0°层中纤维断裂的占优过程，故取图5.35所示的模型计算拔出长度。图中的纤维均承受拉伸应力$\sigma_f$作用，而在周边上有沿纤维方向的切应力，在极限情形，此切应力则为界面或基体的剪切强度$\tau_s$。设在叠层中拔出$(r_1+r_2+\cdots+r_{i-1}+j)$根纤维的拔出长度为$\delta_{i,j}/2$，由极限平衡有

$$\sum_{k=1}^{i-1}(r_k + j)\sigma_f A_f = [r_1 d + (r_1 - r_2)d + \cdots + (r_{i-1} - j)d + jd + 2ih]\frac{\delta_{i,j}}{2}\tau_s \tag{5.147}$$

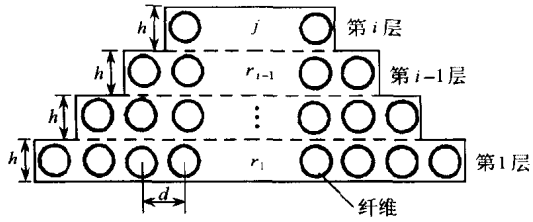



图 5.35　拔出长度的计算模型

这里的 $r_1, r_2, \cdots, r_{i-1}$ 可视为各单层相应临界核中的纤维断裂根数(根据下面的统计分析,关系式 $r_1 > r_2 > \cdots$ 成立)。假设 $d$ 近似等于 $h$,$d_f \approx V_f d$ ($V_f = A_f/(dh)$),由式(5.147)有

$$\delta_{i,j} = \left[\left(\sum_{k=1}^{i-1} r_k + j\right) d_f \Big/ (r_1 + i)\right] \frac{\sigma_f}{\tau_s} = a_{i,j}\sigma_f,$$
$$i = 2, 3, \cdots, n-1; \qquad j = 1, 2, \cdots \tag{5.148}$$

其中

$$a_{i,j} = \left[\left(\sum_{k=1}^{i-1} r_k + j\right) d_f \Big/ (r_1 + i)\right] \frac{1}{\tau_s} \tag{5.149}$$

对于表层 0°单层($i=n$),同理有

$$\delta_{n,j} = \left[\left(\sum_{k=1}^{i-1} r_k + j\right) d_f \Big/ \left(r_1 + n - \frac{j}{2}\right)\right] \frac{\sigma_f}{\tau_s} = a_{n,j}\sigma_f \tag{5.150}$$

其中

$$a_{n,j} = \left[\left(\sum_{k=1}^{i-1} r_k + j\right) d_f \Big/ \left(r_1 + n - \frac{j}{2}\right)\right] \frac{1}{\tau_s} \tag{5.151}$$

假定长为 $\delta_{i,j}$ 的纤维在应力 $K_{i,j}\sigma_f$ 作用下的强度服从韦布尔分布

$$F(K_{i,j}\sigma_f) = 1 - \exp[-\alpha\delta_{i,j}(K_{i,j}, \sigma_f)^\beta] = 1 - \exp\left[-\left(\frac{K_{i,j}^B \sigma_f}{\tilde{\sigma}_{i,j}}\right)^{\beta+1}\right] \tag{5.152}$$

其中

$$\tilde{\sigma}_{i,j} = (a_{i,j}\alpha)^{-1/(\beta+1)}, \quad B = \beta/(\beta+1) \tag{5.153}$$

长为 $\delta_{i,j}$ 的纤维的统计平均强度由下式求出

$$\bar{\sigma}_{i,j} = \int_0^\infty \sigma_f \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma_f}[1 - \exp(-\alpha\delta_{i,j}\sigma_f^\beta)]\mathrm{d}\sigma_f = (a_{i,j}\alpha)^{-1/(\beta+1)}\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta+1}\right) \tag{5.154}$$

式中的 $\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数,因为 $\Gamma(\cdot) \approx 1$,故 $\bar{\sigma}_{i,j} \approx \tilde{\sigma}_{i,j}$。

类似于式(4.115)的推导,可以得到第 $i$(0°)层中的裂纹失稳扩展的临界条件

$$\bar{\sigma}_{i,r_i}/K_{i,r_i}^B < \sigma_f \leqslant \bar{\sigma}_{i,r_i-1}/K_{i,r_i-1}^B \quad 或 \quad \bar{\sigma}_{i,r_i+1}/K_{i,r_i+1}^B < \sigma_f \leqslant \bar{\sigma}_{i,r_i-1}/K_{i,r_i-1}^B \tag{5.155}$$

其中，$i=1,2,\cdots,n$。同理可推出单层板失稳破坏的临界条件为

$$\bar{\sigma}_{i-1,0}/K^{B}_{i-1,0} < \sigma_f \leqslant \bar{\sigma}_{i,0}/K^{B}_{i,0}, \quad i=2,3,\cdots,n \tag{5.156}$$

令正交叠层板最终破坏的概率 $G(\sigma_f)=G_0(=0.5)$，由式(5.143)得到叠层最终破坏的破坏准则

$$1-[1-P_1(\sigma_f)P_2(\sigma_f)\cdots P_{n-1}(\sigma_f)P_n(\sigma_f)]^2=G_0 \tag{5.157}$$

式中的 $\sigma_f$ 和 $r_i$ 均应满足式(5.155)和式(5.156)。

现以 $[0_2/90_m]_s$，$[0_4/90_m]_s$ 碳/环氧及 $[0_4/90_m]_s$ 玻璃/环氧叠层板为例进行计算。碳纤维(T300)的性能取自表 4.1：$\beta=7.68$，$l=25$mm 的纤维的平均强度 $\bar{\sigma}_f=2.8$GPa(由 $\bar{\sigma}_f=(\alpha l)^{-1/\beta}\Gamma(1+1/\beta)$算出 $\alpha$)，拉伸模量 $E_f=230$GPa，$d_f=7\mu$m；E-玻璃纤维的性能为：$\beta=8.2$，$l=50$mm 的纤维的韦布尔特征参数(以应变表示的)为 $\tilde{\varepsilon}_f=0.027$(以应力表示的特征参数则为 $\tilde{\sigma}_f=E_f\tilde{\varepsilon}_f$，再由 $\tilde{\sigma}_f=(\alpha l)^{-1/\beta}$算出 $\alpha$)，$E_f=73$GPa，$d_f=10\mu$m；基体(环氧)性能为：拉伸模量 $E_m=3.45$GPa，$\tau_s=25$MPa。$V_f=0.62\pm0.02$ 的碳环氧及 $V_f=0.55\pm0.05$ 的玻璃/环氧单层的各种性能见表 5.5。表 5.5 中，$\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 分别为单层板的纵向和横向的热膨胀系数，$\nu_{11}$为泊松比，$\Delta T$ 为应力消除温度至冷却的温度差。设试样长度 $L=100$mm，宽度 $W=10$mm。单层中的纤维总数为 $N=W/d$，其中 $d$ 由 $V_f=A_f/(dh)$算出。这里取 $V_f=0.62$(碳/环氧)及 $V_f=0.55$(玻璃/环氧)。

**表 5.5　复合材料单层性能**

| 材料 | $E_{11}$/GPa | $E_{22}$/GPa | $\nu_{11}$ | $\alpha_1$/(1/℃) | $\alpha_2$/(1/℃) | $\Delta T$/℃ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T300/5208 | 138 | 11.7 | 0.29 | $0.09\times10^{-6}$ | $28.8\times10^{-6}$ | −147 |
| 玻璃/环氧 | 41.7 | 13.0 | 0.30 | $7.43\times10^{-6}$ | $22.4\times10^{-6}$ | −100 |

所需的应力集中因子取自 5.8.1 中的计算结果，然后，由前述的统计分析可求得叠层最终破坏时 0°层中的远场纤维应力 $\sigma^0_{fu}$，结果见图 5.36(a)，再由混合法则得到叠层最终破坏时 0°层的应力 $\sigma^{0M}_{xu}$，即

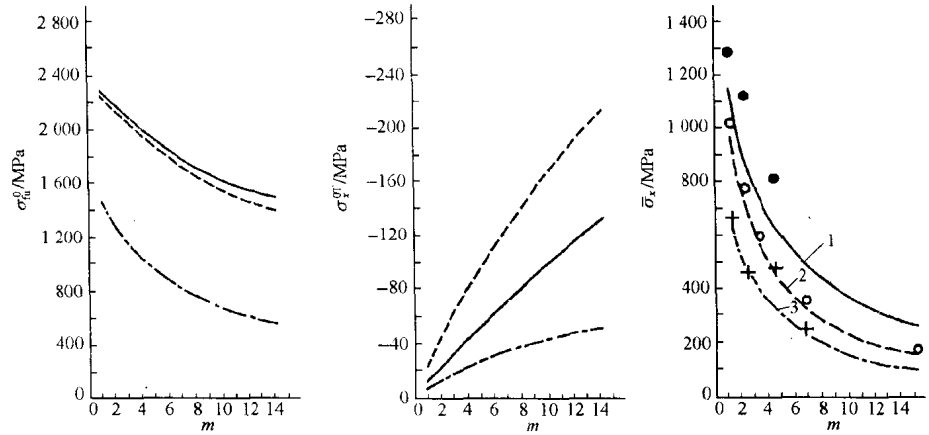
$$\sigma^{0M}_{xu}=\sigma^0_{fu}\left(V_f+\frac{E_m}{E_f}V_m\right), \quad V_m=1-V_f \tag{5.158}$$

复合材料叠层板的强度还与固化残余应力有关，必须加以考虑。正交叠层中 0°层的固化残余应力 $\sigma^{0T}_x$ 的求解步骤由式(5.101)～(5.103)给出，结果见图 5.36(b)。叠层最终破坏时实际施加在 0°层的应力 $\sigma^0_x$ 应由上述两部分叠加得到。考虑到叠层板在拉伸过程中，90°层已先于 0°层发生破坏，至最终破坏时，90°层的承载能力几乎为零，因此，正交叠层板的最终拉伸强度 $\bar{\sigma}_x$ 可由下式给出

$$\bar{\sigma}_x=\frac{nh}{nh+mh}\sigma^0_x=\frac{n}{n+m}\sigma^0_x \tag{5.159}$$

计算结果示于图 5.36(c)中，图中还示出了 Bailey 等(1979)的实验结果，以便比较。

图 5.36(a)示出了 $\sigma_{fu}^{0}$ 与 90°层厚度的关系，这些结果表明，随着 90°层厚度的增加，90°层中的基体开裂引起 0°层中的纤维的局部应力集中也增大，从而导致 $\sigma_{fu}^{0}$ 的降低。




(a) 正交叠层最终破坏时 0°层的远场纤维应力　(b) 正交叠层中 0°层的固化残余应力　(c) 正交叠层的最终拉伸强度与实验结果

图 5.36　理论结果和实验结果

1. $[90_4/0_m]_s$ 碳 / 环氧正交叠层：—— 理论，● 实验；　2. $[90_2/0_m]_s$ 碳 / 环氧正交叠层：- - - - 理论，○ 实验　3. $[90_4/0_m]_s$ 玻璃 / 环氧正交叠层：- - - 理论，+ 实验

图 5.36(b)则表明，叠层中 0°层的固化残余应力(绝对值)随 90°层厚度的增加而增加。图 5.36(c)示出了各种叠层的最终拉伸强度与 90°层厚度的关系，结果表明，估计的 $[0_4/90_m]_s$ 碳/环氧叠层板的强度比实验值低；$[0_2/90_m]_s$ 碳/环氧的强度与实验较为接近；而 $[0_4/90_m]_s$ 玻璃/环氧的强度则与实验值相当吻合，仅在 $m=4$ 时有差异，这是由于玻璃/环氧叠层板受拉伸时，有些试样会发生层间分层或径向劈裂(对碳/环氧则未观察到此种现象)，导致某些实验数据分散。从图 5.36(c)还可以看到，前述的理论统计强度与实验结果不仅在数值上较相符，而且随 $m$ 的变化也具有一致的规律性。

最后指出，对 $[0_4/90_m]_s$ 碳/环氧和玻璃/环氧进行计算，求得的 0°单层中形成随机临界核的纤维临界断裂数为：$r_1=5, r_2=3, r_3=2, r_4=1$；$[0_2/90_m]_s$ 碳/环氧：$r_1=5, r_2=0$(表层发生失稳破坏)。这表明，叠层板的最终破坏始于 90°层相邻的 0°单层中的纤维断裂，各 0°单层由里向外发生逐步破坏，最终导致失稳破坏。

曾庆敦等(1999)还采用类似的方法，对[0/$90_n$/0/$90_n$/0]碳/环氧叠层板的最终破坏过程中的应力重新分布及其统计破坏问题进行了研究，有兴趣的读者可参阅此文章。

## 思 考 题

5.1 正交叠层板在拉伸荷载作用下，中间的横向层通常会发生沿纤维方向的基体开裂，而两边的纵向板则会发生纵向开裂。为了尽可能减少或避开这些情况的出现，应如何构造较合理的叠层板？

5.2 研究正交叠层板的强度与破坏，通常采用确定性理论和统计理论，试指出这两种理论的优缺点。除这两种理论和方法外，还有无更好更合理的理论和方法？

5.3 试指出哪些应力可能会引起叠层板的边缘脱层。

5.4 图 5.24 中，估计值大多数均比实验值高，其原因是什么？有限子层剪滞模型有无需改进之处，如有，请说明。

5.5 试由式(5.130)～(5.133)求出各位移分布。

5.6 试按 5.8.2 中的计算步骤，求出计及层间界面破坏影响的各位移分布函数。

5.7 如果计及层间界面破坏的影响，那么，5.8.3 中的统计分析应如何处理？

# 第六章　短纤维复合材料的强度与破坏

习惯上把所用的不连续纤维增强的复合材料归为短纤维复合材料类。通常，把纤维的长径比(长度/直径$=l/d_f$)作为纤维相对长度的一种度量。有关的$d_f$值依在基体中的纤维分散性而定，可以包括单丝、原丝、粗纱及纤维束的其他形式。虽然，不连续纤维如晶须已经被用来增强金属和陶瓷，但是，大多数短纤维复合材料仍是以树脂基为基础的。不连续纤维增强塑料在性能上的多面性及较低的制作成本是极具吸引力的。目前，世界上金属资源正被迅速消耗，找寻高效能材料逐渐引起人们重视，不连续纤维增强塑料已被广泛应用，如在汽车、船舶及航空等方面的应用。

不连续纤维复合材料通常由分布在某一连续的基体相中的较短的、长度不定的及杂乱无章的纤维所组成。在树脂基复合材料中，纤维大多数是玻璃(也可使用碳和芳纶纤维)，通常还需要加入非纤维填料。纤维的方位取决于所采用的工艺条件，可以在面内或空间随机变化，也可以近似地朝某一方向规整排列。

因纤维长度、方位及其端部的纤维/基体之间的相互作用，对短纤维复合材料力学行为的了解是困难的。下面将讨论这些因素对此类复合材料的物理、力学性能的影响。

## 6.1　荷载传递

为了对**短纤维复合材料**的力学性能有较清晰的了解，必须弄清楚**应力传递机制**。迄今为止，人们已经做了各种各样的尝试，以估计短纤维复合材料中从基体传递给纤维的应力。进行了基于**剪滞理论**、**弹性理论**及**有限元方法**的分析。其中考虑了：纤维**长径比**，胶接末端、松散末端及纤维端部的几何形状影响，及纤维端部界面附近的径向和切向应力分布等。对界面强度的实验测定通常采用单纤维拔出实验、纤维碎断实验(fragmentation test)、细观拉伸实验及细观压缩实验。虽然剪滞途径不如其他方法那样精确，但它可以为获得复杂问题的某些启示，提供一种简单的分析。下面将采用剪滞理论，讨论计及或不计及相邻短纤维之间的相互作用时的纤维轴向应力和界面应力。

### 6.1.1　单根短纤维

Cox(1952)首次研究了包埋在某一无穷大的基体材料中的单根短纤维的问

题。在这个实质上是一维的方法中，因纤维并不直接受力，所以考虑作用在纤维上的荷载完全是由基体中的切应力的产生而通过纤维/基体界面传递到纤维上的。在剪滞分析的假定下，纤维末端的拉伸应力为零。

考虑半径为 $R$ 的长圆柱形复合材料，其中间包埋一根半径为 $r_f$、长为 $l$、沿圆柱轴方向的纤维。作为一个整体的复合材料沿纤维方向承受一个正应变 $\varepsilon$。依据剪滞分析的假定可以导出下列关系

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = H(u - v) \tag{6.1}$$

式中：$u$ 为纤维在 $x$ 处的位移；$v$ 为纤维在 $x$ 处的基体位移；$H$ 为某一常数，$p$ 为纤维轴向力。纤维的力-位移关系是

$$p = E_f A_f \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{6.2}$$

式中：$E_f$ 和 $A_f$ 分别为纤维的轴向杨氏模量和横截面面积。将式(6.2)及 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$=常数$=\varepsilon$ 代入式(6.1)，并应用边界条件：当 $x=0, l$ 时，$p=0$，即可获得纤维轴向应力 $\sigma_f$ 及界面切应力 $\tau$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_f &= \frac{p}{A_f} = E_f\varepsilon\left[1 - \frac{\cosh\beta(l/2 - x)}{\cosh(\beta l/2)}\right] \\ \tau &= E_f\varepsilon\left[\frac{G_m}{2E_f\ln(R/r_f)}\right]^{1/2}\frac{\sinh\beta(l/2 - x)}{\cosh(\beta l/2)}\end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

式中，$\beta=[H/(E_fA_f)]^{1/2}$；$H=\dfrac{2\pi G_m}{\ln(R/r_f)}$；$G_m$ 为基体切变模量。图 6.1 示出了 $\sigma_f$ 和 $\tau$ 沿纤维长度的变化。最大的纤维应力发生在纤维长度的中央，对于很长的纤维，它达到 $E_f\varepsilon$。切应力 $\tau$ 在纤维端部(即在 $x=0, l$ 处)达到最大，在纤维中部衰减至零。

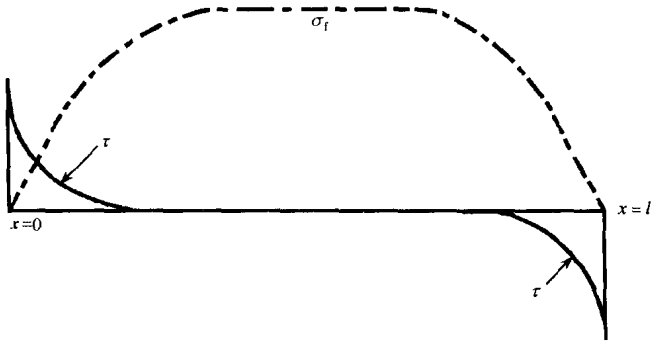



图 6.1　$\sigma_f$ 和 $\tau$ 沿纤维长度的变化

### 6.1.2　纤维-纤维相互作用

在短纤维复合材料中，纤维之间的相互作用比连续纤维复合材料更复杂。这是因为某根短纤维所担负的轴向荷载必须传递给其端部附近的邻近纤维。为了说明

在短纤维复合材料中的荷载传递，下面将扼要介绍 Fukuda 和 Chou(1981)的工作。这个方法基于剪滞模型，在基体中引进部分轴向荷载，并假定纤维末端与基体相粘结。如果纤维端部处的纤维与基体之间的粘结是完好的(例如，通常在金属基复合材料和受压缩荷载的树脂基复合材料中所观察到的这些情形)，那么，此修正的剪滞分析的假定就是正确的。图 6.2 给出了二维分析模型，图中绘有阴影线的基体部分承受轴向荷载，其行为类似于纤维，但它们的杨氏模量与实际纤维不同。纤维直径和基体层宽度分别用 $d_f$ 和 $d$ 表示。把图 6.2 中含有纤维端部的代表性区域沿纤维方向 $x$ 分成 $n$ 个部分，在此区域中的纤维编号用 $i=1$ 到 $m$ 表示。图 6.3 示出了第 $i$ 根纤维和相邻基体微段的受力图，由 $x$ 方向的力的平衡，有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}p_{1j}}{\mathrm{d}x}+\tau_{1j}=0\\&\frac{\mathrm{d}p_{ij}}{\mathrm{d}x}+\tau_{ij}-\tau_{i-1j}=0,\quad i=2,3,\cdots,m-1\\&\frac{\mathrm{d}p_{mj}}{\mathrm{d}x}+\tau_{m-1j}=0\end{aligned}\right\}\tag{6.4}$$

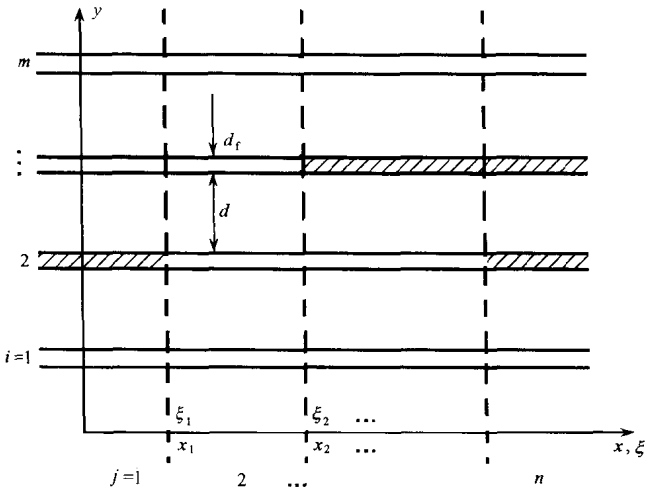



图 6.2　短纤维复合材料应力分布的分析模型

式中，$p_{ij}$和 $\tau_{ij}$分别是第 $j$ 区域中的第 $i$ 根纤维单位厚度的轴向力和界面切应力。

由线弹性变形条件可导出下列的应力-应变关系

$$p_{ij}=E_{ij}d_f\frac{\mathrm{d}u_{ij}}{\mathrm{d}x},\quad \tau_{ij}=\frac{G_m}{d}(u_{i+1j}-u_{ij})\tag{6.5}$$

式中，$u_{ij}$为第 $j$ 区域中的第 $i$ 根纤维的位移；$E_{ij}$或者是纤维的杨氏模量 $E_f$ 或者是基体的杨氏模量 $E_m$。

现在，将上述的一般公式应用于图 6.4 所示的复合材料中。此模型由一行等长度的短纤维及围绕此行的两根长纤维组成，采用此简单的模型可以说明短纤维的

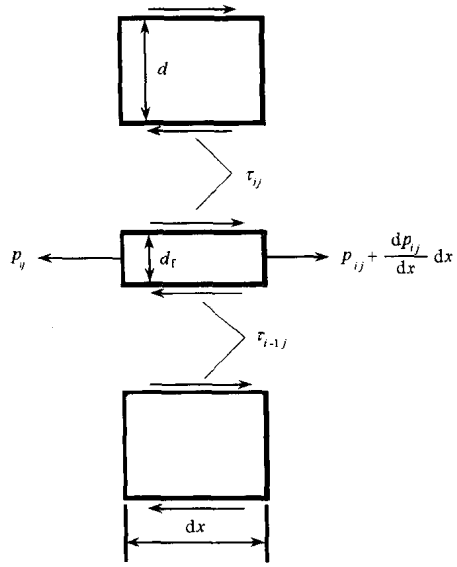



图 6.3　第 $i$ 根纤维和相邻基体微段的受力图

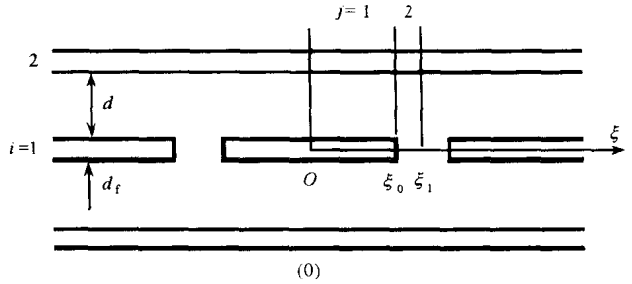



图 6.4　短纤维模型复合材料的应力分析模型

荷载传递。

给定 $i(i=1$ 和 $2)$和 $j(j=1$ 和 $2)$，如图 6.4 所示，从式(6.4)和式(6.5)中可以求出 $u_{ij}$和 $p_{ij}$的通解，即

$$\left.\begin{aligned}
u_{11} &= A_1 + B_1\xi + C_1e^{\lambda_1\xi} + D_1e^{-\lambda_1\xi}\\
u_{21} &= A_1 + B_1\xi - \frac{1}{2}(C_1e^{\lambda_1\xi} + D_1e^{-\lambda_1\xi})\\
p_{11} &= E_f[B_1 + \lambda_1(C_1e^{\lambda_1\xi} - D_1e^{-\lambda_1\xi})]\\
p_{21} &= E_f\left[B_{11} - \frac{1}{2}\lambda_1(C_1e^{\lambda_1\xi} - D_1e^{-\lambda_1\xi})\right]\\
u_{12} &= A_2 + B_2\xi + C_2e^{\lambda_2\xi} + D_2e^{-\lambda_2\xi}\\
u_{22} &= A_2 + B_2\xi - \frac{k}{2}(C_2e^{\lambda_2\xi} + D_2e^{-\lambda_2\xi})\\
p_{12} &= E_m[B_2 + \lambda_2(C_2e^{\lambda_2\xi} - D_2e^{-\lambda_2\xi})]\\
p_{22} &= E_f\left[B_{22} - \frac{k}{2}\lambda_2(C_2e^{\lambda_2\xi} - D_2e^{-\lambda_2\xi})\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (6.6)$$

式中，$\xi=x/d_f$；$k=E_m/E_f$；$\lambda_j=\left(\dfrac{\alpha_{1j}+2\alpha_{2j}}{\alpha_{1j}\alpha_{2j}}\right)^{1/2}$；$\alpha_{ij}=E_{ij}d/(G_m d_f)$；$A_1,B_1,C_1,D_1,A_2,B_2,C_2,D_2$ 为待定常数。

图 6.4 所示模型的轴向力和边界条件是

1)对称性条件

$$u_{11}|_{\xi=0}=0,\quad u_{21}|_{\xi=0}=0,\quad u_{12}|_{\xi=\xi_1}=u_{22}|_{\xi=\xi_1} \tag{6.7}$$

2)连续条件

$$u_{11}|_{\xi=\xi_0}=u_{12}|_{\xi=\xi_0},\quad u_{21}|_{\xi=\xi_0}=u_{22}|_{\xi=\xi_0},\quad p_{11}|_{\xi=\xi_0}=p_{12}|_{\xi=\xi_0},$$
$$p_{21}|_{\xi=\xi_0}=p_{22}|_{\xi=\xi_0} \tag{6.8}$$

3)力的平衡条件

$$p_{11}+2p_{21}=3p_0,\quad p_{12}+2p_{22}=3p_0 \tag{6.9}$$

其中，$3p_0$ 表示总的施加荷载，$\xi_0$ 和 $\xi_1$ 由图 6.4 给出。上述条件提供了 9 个方程(其中 8 个方程是独立的)，从而可以确定式(6.6)中的 8 个积分常数。

最后，求出轴向荷载分布如下

$$\left.\begin{aligned}
p_{11}/p_0&=1-\frac{2\lambda_1(1-k)}{3F}\sinh\lambda_2(\xi_1-\xi_0)\cosh\lambda_1\xi\\
p_{21}/p_0&=1+\frac{\lambda_1(1-k)}{3F}\sinh\lambda_2(\xi_1-\xi_0)\cosh\lambda_1\xi\\
p_{12}/p_0&=\frac{3k}{2+k}\left[1+\frac{2\lambda_2(1-k)}{3F}\sinh\lambda_1\xi_0\cosh\lambda_2(\xi-\xi_1)\right]\\
p_{22}/p_0&=\frac{3}{2+k}\left[1-\frac{k\lambda_2(1-k)}{3F}\sinh\lambda_1\xi_0\cosh\lambda_2(\xi-\xi_1)\right]
\end{aligned}\right\} \tag{6.10}$$

其中

$$F=k\lambda_2\cosh\lambda_2(\xi_1-\xi_0)\sinh\lambda_1\xi_0+\frac{2+k}{3}\lambda_1\sinh\lambda_2(\xi_1-\xi_0)\cosh\lambda_1\xi_0$$

用给定的边界条件也可以获得位移场。

从图 6.4 中，还可以推演出像单根短纤维、单根半无限长纤维及由某一间隙隔开的两根半无限长纤维这样的极限情形。此外，对于纤维末端无荷载传递情形的解答，可由式(6.10)令 $k=0$ 获得。

图 6.5 示出了不同的 $E_f/E_m$ 值时连续纤维及不连续纤维的轴向荷载分布。由图可见，随着 $E_f/E_m$ 的增加，短纤维末端的正应力变得越来越小。这是很自然的，因为 $E_f/E_m$ 增加时，纤维末端的荷载传递就变得相对小了。

如果用 $(l_1-x)/d_f$ 作为横坐标，则对于给定的 $d/d_f$ 及 $E_f/E_m$ 值，不同长度的纤维端部附近的轴向荷载分布基本上是相同的，即使纤维长度 $l_1/d_f$ 变化，也是如此(见图 6.6)。图中的 $\delta$ 即为 Rosen 所定义的无效长度(见 4.2.2 内容)，显然，它与实际纤维长度无关。

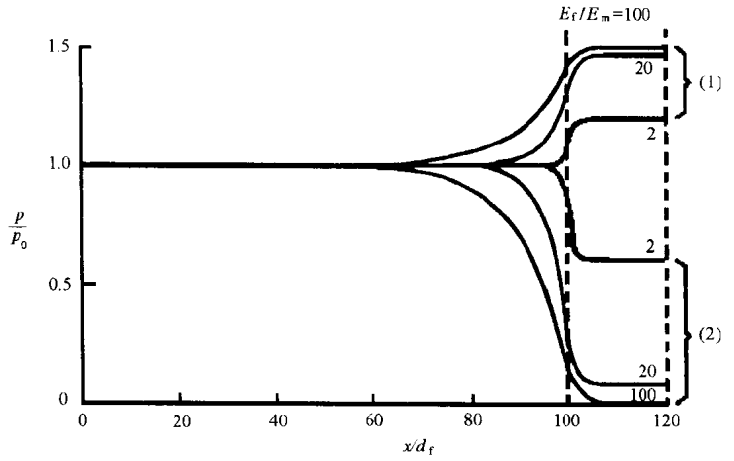



图 6.5　各种 $E_f/E_m$ 值时连续纤维及不连续纤维的轴向荷载分布

($d/d_f=1, l_1/d_f=100, l_2/d_f=120$)

(1)连续纤维；(2)短纤维($0\leqslant l/d_f\leqslant 100$)和基体($100\leqslant l/d_f\leqslant 120$)

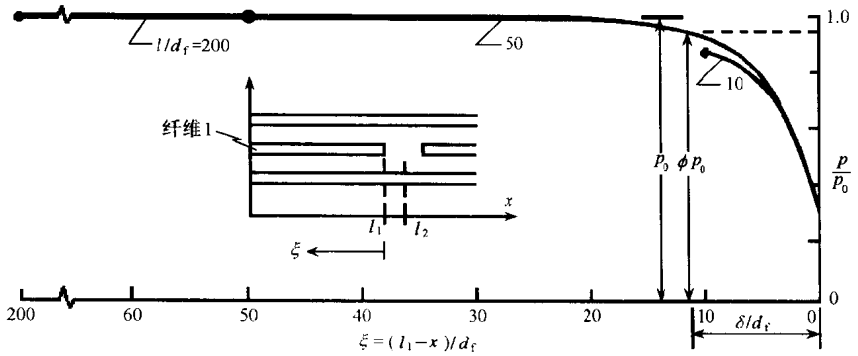



图 6.6　纤维 1 上的轴向力分布和无效长度的定义

($d/d_f=1, E_f/E_m=20, l/l_1=1.2$)

## 6.2　短纤维复合材料的强度与破坏

短纤维复合材料的力学行为不同于长纤维复合材料，常常受纤维不连续而导致的复杂应力分布所控制。尤其是纤维末端的**局部应力集中**，在影响短纤维复合材料性能方面起着关键性的作用，它通常使短纤维复合材料的强度大大减小，其强度比具有相同纤维含量的连续纤维复合材料的强度要小得多。目前，已经提出了几种理论来估计不连续纤维的强度。其中的一种理论是基于“混合法则”的修正，它是在连续纤维的基础上发展起来的。因为在短纤维复合材料中的轴向应力分布是非均匀的，所以，必须计及**纤维长度效应**来修正混合法则。

下面首先讨论纤维沿直线排列情形的短纤维复合材料的强度，然后讨论具有一定方向性排列和随机排列的短纤维复合材料的纤维方位效应。

### 6.2.1 单向直线排列短纤维复合材料

为了研究短纤维复合材料的强度，有必要回忆一下关于连续纤维复合材料的原来的强度估计。复合材料的最终轴向拉伸强度表达式(见 4.1 节)为

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu}V_f + \sigma'_{mu}(1 - V_f) \tag{6.11}$$

式中，$\sigma_{cu}$和 $\sigma_{fu}$分别为复合材料和纤维的最终拉伸强度；$\sigma'_{mu}$表示复合材料破坏时基体的应力。

式(6.11)是基于复合材料中的拉伸应变沿轴向是均匀的、施加荷载是分布于纤维和基体中的假定而推导出来的。当纤维不连续时，式(6.11)的等应变条件就不再是有效的。在不连续纤维端部附近的纤维和基体中的应变的差异产生沿纤维轴方向的切应力，作用在纤维两端部附近的剪切力使纤维受拉伸或压缩应力。正是通过这种应力传递，施加荷载才能分散于短纤维中。

1. 纤维长度考虑

图 6.7 示出了纤维轴向拉伸应力随纤维长度的变化情况，纤维端部的线性应力变化轮廓来源于界面切应力为常量的假定。能够达到最大的纤维应力的最小纤维长度定义为**荷载传递长度**($l_t$)；而能够达到纤维的拉伸强度 $\sigma_{fu}$的最小纤维长度则称为**临界纤维长度**($l_c$)，它与施加应力无关，是材料系统的一个重要指标，可以直接影响复合材料的强度和弹性模量。有时把荷载传递长度和临界长度也称之为**无效长度**，因为在该长度内，纤维承受的应力小于最大的纤维应力或强度。值得指出的是，如果纤维长度很长，复合材料的性能就趋于连续纤维增强复合材料的性能。图 6.7 所表示的应力分布是近似的，这是因为假设基体材料是刚塑性体而得到的。实际上，大多数基体材料是弹塑性的，所以只有假设基体是弹塑性材料才能得出较精确的应力分布，但是，在进行这种复合材料的理论分析时会遇到很多困难。

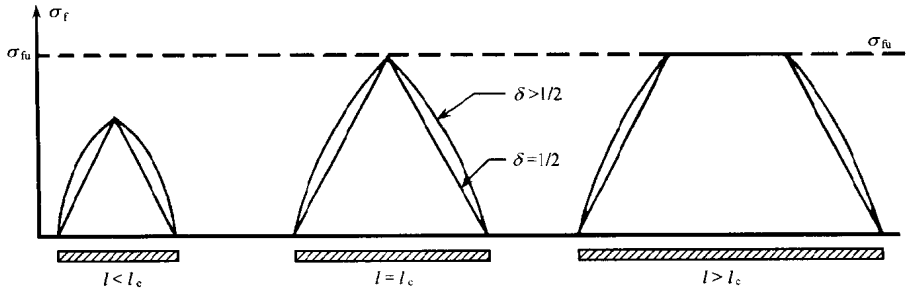



图 6.7 纤维轴向拉伸应力随纤维长度的变化

当纤维应变等于基体应变时，可以认为从纤维末端到最大值之间的应力为线性传递。假定界面切应力是常量，并考虑拉伸应力与切应力的平衡，可以很容易导

出纤维临界长度

$$\frac{l_c}{d_f}=\frac{\sigma_{fu}}{2\tau_s} \tag{6.12}$$

式中，$\tau_s$ 是基体或界面的剪切强度，通常为较小者。Vinson 和 Chou(1975)曾经讨论过关于 $l_c$ 的实验测试技术。

Kelly(1973)采用临界纤维长度的概念，并用平均纤维应力 $\bar{\sigma}_f$ 来替换式(6.11)中的 $\sigma_{fu}$，导出了 $l\geqslant l_c$ 时的复合材料强度的表达式

$$\sigma_{cu}=\bar{\sigma}_f V_f+\sigma'_{mu}(1-V_f)=\sigma_{fu}[1-(1-\delta)l_c/l]V_f+\sigma'_{mu}(1-V_f) \tag{6.13}$$

式中，$\delta$ 被定义为图 6.7 中沿长度 $l_c/2$ 的应力分布曲线下的面积与 $\sigma_{fu}l_c/2$ 的面积之比。对于界面剪切强度为常量的情形，$\delta=1/2$，因此

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{cu}&=\sigma_{fu}\left(1-\frac{l_c}{2l}\right)V_f+\sigma'_{mu}(1-V_f),\quad l\geqslant l_c\\ \sigma_{cu}&=\sigma_{fu}V_f\frac{l}{2l_c}+\sigma'_{mu}(1-V_f),\quad l\leqslant l_c\end{aligned}\right\} \tag{6.14}$$

对于 $l/l_c=10$ 的短纤维，由上式可以估计出 $\bar{\sigma}_f$ 达到连续纤维强度的 95%。对于金属基和树脂基，式(6.14)具有良好的近似性。必须指出，式(6.14)未计及出现在短纤维复合材料中的纤维末端处的应力集中，这些应力集中将进一步降低短纤维复合材料的强度。

对于完全弹性变形的纤维，有 $\sigma_{fu}=E_f\varepsilon_{cu}$，其中 $\varepsilon_{cu}$ 为复合材料的最终破坏应变，式(6.12)可以重新写为

$$\frac{l_c}{d_f}=\frac{E_f\varepsilon_{fu}}{2\tau_s} \tag{6.15}$$

对于纤维长度具有变化的复合材料，Bowyer 和 Bader(1972)指出，当复合材料应变 $\varepsilon_c$ 为任意值时，有下式给出的临界纤维长度

$$l_\varepsilon=\frac{E_f\varepsilon_c d_f}{2\tau_s} \tag{6.16}$$

比 $l_\varepsilon$ 短的纤维，承受的平均应力为

$$\bar{\sigma}_f=\frac{l\tau_s}{d_f} \tag{6.17}$$

它始终小于 $E_f\varepsilon_c/2$。比 $l_\varepsilon$ 长的纤维，承受的平均应力为

$$\bar{\sigma}_{f\varepsilon}=E_f\varepsilon_c\left(1-\frac{E_f\varepsilon_c d_f}{4l\tau_s}\right) \tag{6.18}$$

它始终大于 $E_f\varepsilon_c/2$。

效仿 Bowyer 和 Bader，对于含有一系列不同长度纤维的复合材料，在某一给定的复合材料应变水平下，可以将纤维长度分成许多子部分来估计其强度(Lees 1968)。临界以下部分的纤维长度及其体积分数分别用 $l_i$ 和 $V_i$ 表示，而临界以上部分则用 $l_j$ 和 $V_j$ 表示。这样，复合材料的应力就可以用下式表达：

$$\sigma_c = \sum_{i}^{l_i<l_c} \frac{\tau_s l_i}{d_f} V_i + \sum_{j}^{l_j>l_c} E_f \varepsilon_c \left(1 - \frac{E_f \varepsilon_c d_f}{4 l_j \tau_s}\right) V_j + E_m \varepsilon_c (1 - V_f) \qquad (6.19)$$

上式表明，复合材料应变较低时，$l_c$ 较小，所有纤维将有助于增强，正如式(6.18)给出的那样。随着应变的增加，纤维逐步变小的部分将按照式(6.18)来增强，而增加的部分则遵从式(6.17)。这样，期望对于像式(6.19)所表示的这种材料的荷载-延伸曲线，当应变增加时显示较小的斜率。Bowyer 和 Bader 对短纤维增强热塑性塑料所做的工作已经进一步表明，改进纤维/基体的粘结强度对复合材料的强度有少许提高。而太短以致不能很好地承受拉伸的纤维将导致复合材料在十分低的应变水平下发生破坏。这样，如果要获得很好的增强效果，需去除那些非常短的纤维。

按式(6.14)来计算单向短纤维复合材料的强度，实际上已假设纤维体积分数高于某一最小值 $V_{fmin}$。这时，如果所有纤维都破坏的话，剩下的基体就没有能力单独承担外力作用。所谓纤维**临界体积分数**，是使纤维能实现增强作用的**最小纤维体积分数**。最小纤维体积分数 $V_{fmin}$ 及临界纤维体积分数 $V_{fc}$ 分别由下式定义：

$$\left.\begin{aligned} V_{fmin} &= \frac{\sigma_{mu} - \sigma'_{mu}}{\sigma_{fu} + \sigma_{mu} - \sigma'_{mu}} \\ V_{fc} &= \frac{\sigma_{mu} - \sigma'_{mu}}{\sigma_{fu} - \sigma_{mu}} \end{aligned}\right\} \qquad (6.20)$$

式中的 $\sigma_{mu}$ 为基体的强度。把式(6.20)与连续纤维复合材料的相应公式对比，对于同样的纤维和基体材料来说，短纤维复合材料的 $V_{fmin}$ 和 $V_{fc}$ 比连续纤维复合材料的要高。这个道理是很明显的，因为短纤维的增强作用不像连续纤维那样有效。然而，当纤维长度远大于纤维临界长度时，纤维的平均应力趋于最大纤维应力，于是，短纤维复合材料的性能也就与连续纤维复合材料的性能差不多。

如果纤维体积分数小于 $V_{fmin}$，则当所有纤维断裂时，复合材料也不会断裂，因为基体材料的剩余截面面积还可以支持全部荷载，只有基体破坏时，复合材料才破坏。所以当 $V_f < V_{fmin}$ 时，复合材料的强度可以写成

$$\sigma_{cu} = \sigma_{mu}(1 - V_f) \qquad (6.21)$$

2. 统计强度理论

下面将从考虑纤维长度变化及其对纤维轴向应力分布的影响开始，讨论短纤维复合材料的统计强度理论。然后介绍由纤维-纤维相互作用所导致的局部应力集中影响，并将统计强度理论加以扩展，以便计及由短纤维末端的聚集而引起的最大应力集中。

(1)混合法则的修正

考虑由均匀长度及强度的纤维所组成的单向短纤维复合材料，其破坏机制可以按照纤维长度(见图 6.8)进行分类。当纤维十分短时，在某根纤维末端处形成的一条裂纹可以绕过邻近纤维，而纤维却不发生断裂(图 6.8(a))。复合材料的最后破坏归因于纤维拔出。另一方面，如果纤维足够长，纤维端部裂纹将引起邻近纤维

的断裂，由此导致复合材料的破坏(图 6.8(b))。Fukuda 和 Chou(1981)和 Hikami 和 Chou(1984)的强度模型针对后一情形。

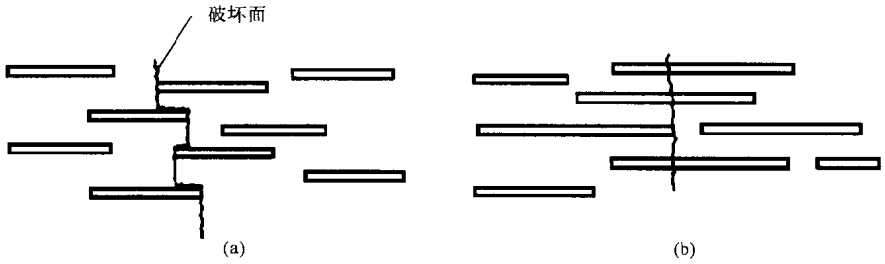



图 6.8　短纤维复合材料的两种破坏模式

复合材料最终强度 $\sigma_{cu}$ 定义为引起第一根纤维破坏时的应力水平，因而，某根纤维中的最大应力在预报复合材料强度中是十分重要的。图 6.9 示出了某根短纤维的应力分布，这里，$\sigma_{max}$ 和 $\sigma_0$ 分别是轮廓线中的最大及平稳段处的应力。破坏时

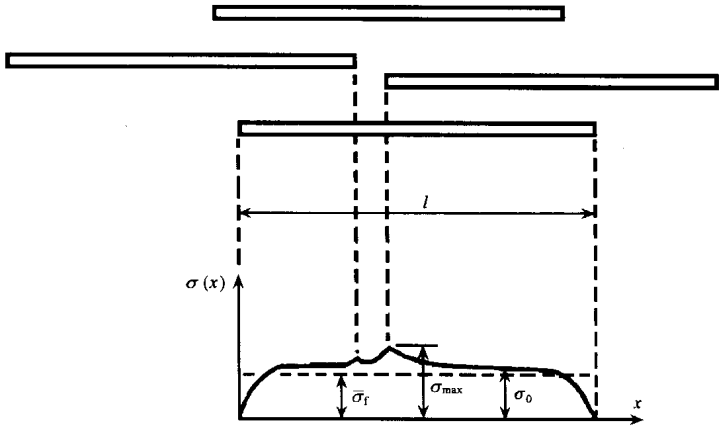



图 6.9　短纤维复合材料的应力分布

的平均纤维应力由下式给出：

$$\bar{\sigma}_f = \frac{1}{l}\int_0^l \sigma(x)\mathrm{d}x \tag{6.22}$$

在复合材料具有纤维长度的某种分布的情形中，式(6.22)应由下式取代：

$$\bar{\sigma}_f = \int_0^\infty f(l)\left[\frac{1}{l}\int_0^l \sigma(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}l \tag{6.23}$$

式中：$f(l)$ 是纤维长度的某一概率密度函数，它具有下列特征：

$$\int_0^\infty f(l)\mathrm{d}l = 1, \quad \int_0^\infty f(l)l\mathrm{d}l = \bar{l} \tag{6.24}$$

其中 $\bar{l}$ 表示平均纤维长度。于是，式(6.13)的混合法则表达式中应该使用式(6.23)

中的 $\sigma_f$。$\bar{\sigma}_f$ 和 $\sigma_0$ 的值是不同的，可是，当纤维长度增加时，其差别逐渐消失。对于较大的纤维长径比，合理地假定 $\bar{\sigma}_f \approx \sigma_0$。此外，定义下式的纤维应力集中因子 $K$

$$\sigma_{max} = \sigma_{fu} = K\sigma_0 \tag{6.25}$$

式(6.13)可以写为

$$\sigma_{cu} = \frac{\sigma_{fu}}{K}V_f + \sigma'_{mu}(1 - V_f) \tag{6.26}$$

(2)临界带模型

Curtis、Bader 和 Bailey(1978)采用短玻璃和碳纤维增强聚酰胺热塑性塑料，进行了短纤维复合材料强度的系统的实验研究。他们的实验发现使 Bader，Chou 和 Quigley(1979)提出了一个损伤模型。其基本概念是：在大大低于纤维破坏应变的细观应变作用下，细观裂纹最可能在纤维末端扩展，而最后破坏起始于受裂纹累积所削弱的某一临界截面。

图 6.10 绘出了 Bader、Chou 和 Quigley 在短纤维复合材料中所使用的典型体积单元。在强度模型中的**临界带**宽度用 $\beta l$ 表示，其中，$\beta(0<\beta\leqslant 1)$为某一常量参数，$l$ 为平均纤维长度。假定临界带宽度与无效长度(参见 4.2 节)是同一个数量级或相等。

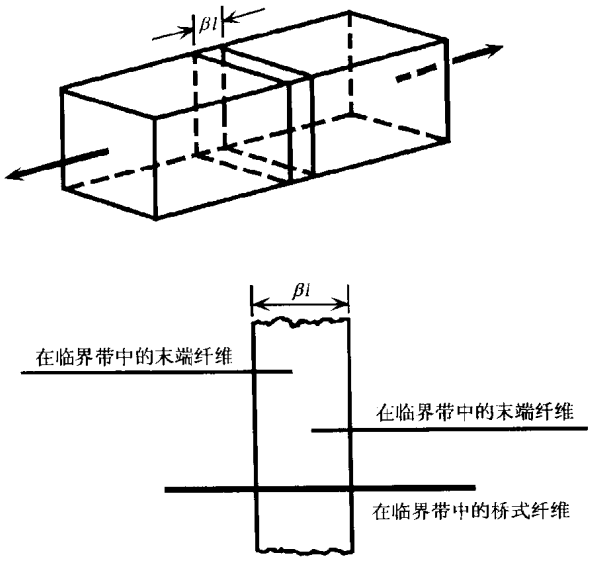



图 6.10　在短纤维复合材料中的一种典型体积单元和临界带

某根不连续纤维可以终止于临界带中——**末端纤维**(在这一情形中，它不再承担任何荷载)，或者，它可以桥接于临界带中——**桥式纤维**，并对临界带的强度起一份作用。发现一根末端纤维和一根桥式纤维的概率分别是 $\beta$ 和 $1-\beta$。所有纤维均假定具有均匀强度 $\sigma_{fu}$。在复合材料的每一横截面内，末端纤维和桥式纤维是随机

分布的。图 6.11 示出了二维纤维排列中某一横截面上的一种典型纤维构造，末端纤维和桥式纤维分别用实心圆和空心圆绘出。在施加应力作用下，桥式纤维中的应力受到从相邻末端纤维传递过来的应力的增强。例如，图中第 8 号桥式纤维中的应力受到第 1，5，6，7，9，12 和 13 号末端纤维的增强。换句话说，它受邻近纤维端部间隙(fiber-end-gap)$A$，$B$，$C$ 和 $D$ 的增强。

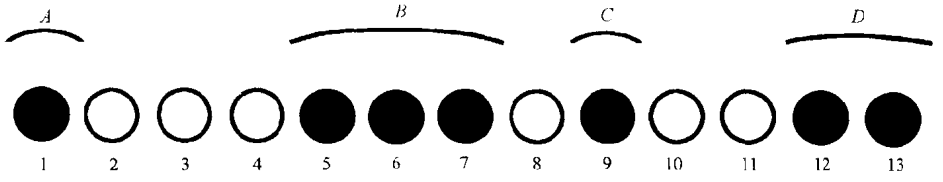



图 6.11　纤维构造的横截面示意图

实心和空心圆分别表示末端纤维和桥式纤维，

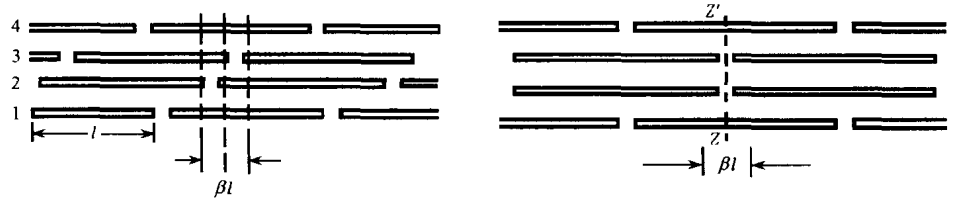
毗连的一组末端纤维称为纤维端部间隙(即 $A$，$B$，$C$ 和 $D$)

复合材料的强度由临界带中的桥式纤维数与末端纤维数的相对比值来确定。当应变超过某一临界值时，末端纤维端部附近将出现基体裂纹。当桥式纤维不能够承受住由基体开裂及破坏发生所传递来的荷载时，临界情形就出现。Bader、Chou 和 Quigley 研究并计算了就较宽范围的纤维长径比、纤维临界长度、纤维/基体界面强度及临界带宽度而言的临界应力和应变值。

(3)应力集中

用精确的方法来计算图 6.12 所示的单向纤维排列的应力集中因子是很困难的。采用下述的假定则可以使应力集中因子 $K$ 的计算变得简便：①所有的纤维均具有相同的长度 $l$；②它们沿轴向一根根一行行地排列；③两相邻行之间的间距是均匀的(见图 6.12(a))；④假定在宽为 $\beta l$ 的临界带中有末端的纤维具有沿横截面 $ZZ'$ 成直线排列的端部(见图 6.12(b))。纤维末端的这种聚集在二维排列中称为**纤维端部间隙**。假定纤维长度 $l$ 比临界长度 $l_c$ 大得多，因而，可以使用由于长纤维断裂而导致的应力集中结果。此外，在图 6.12(b)中，把 1 号和 4 号纤维称为“桥式纤维”，2 号和 3 号纤维称为“末端纤维”。

当考虑从纤维端部间隙所产生的增强效应时，应力集中因子 $K$ 可能不易求




(a) 二维纤维排列的临界带　　(b) 纤维端部间隙

图 6.12

得，故对荷载分担法则需引进假定。Hikami 和 Chou(1984)检验了对应力集中因子 $K$ 的计算所作的首个最简单的假定——仅考虑某根桥式纤维的第一个最邻近的纤维端部间隙的应力增强效应。它被认为是**弱局部荷载分担法则**，如果发现末端纤维的概率比较小，这个假定就是容许的。Hikami 和 Chou(1984，1990)采用剪滞方法，获得了由于存在 $n_l$ 和 $n_r$ 根末端纤维(见图 6.13)的应力集中因子。

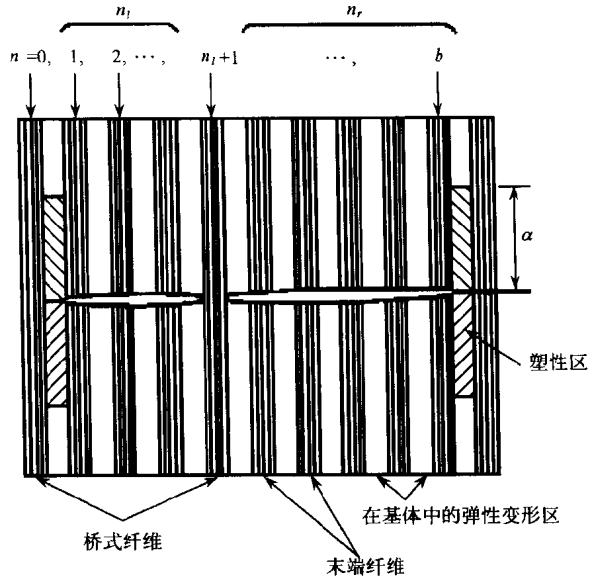



图 6.13　在纤维端部间隙的顶端具有基体塑性变形的短纤维复合材料中的应力集中计算模型

计算结果表明，第$(n_l+1)$根纤维的破坏不会导致复合材料的破坏，因为第$(n_l+1)$根纤维的应力集中因子大于第$(n_l+1)$根桥式纤维破坏后的第 0 根桥式纤维的应力集中因子。很明显，第 0 根桥式纤维的破坏将导致整个复合材料的破坏。这样，当忽略基体的荷载承担能力时，复合材料的强度就由下式给出

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu}/K_b \tag{6.27}$$

由于 $b$ 根纤维断裂所导致的弹性应力集中因子的确切表达在 2.1.3 中给出。

Hikami 和 Chou(1984)也获得了对于具有塑性变形基体(见图 6.13)的复合材料的应力集中因子的确切表达式。对于小范围塑性变形的情形，塑性应力集中因子 $\tilde{K}_b$，可以根据无量纲塑性变形区长度 $\alpha$，用级数展开式来表达。在大范围塑性变形的情形中，某个纤维端部间隙前端的塑性应力集中因子 $\tilde{K}_b$ 可以用下式来近似

$$\tilde{K}_b \cong 1 + \frac{2}{\pi}\left(\frac{T_0}{\sigma_a}\right)[n_l(b\sigma_a/T_0) + \gamma'] \tag{6.28}$$

其中

$$T_0 = \tau_s(dE_f/G_mA_f)^{1/2} \tag{6.29}$$

式中，$\sigma_a$ 为施加应力；$b$ 为间隙中的纤维数；$\gamma'$ 为欧拉常数($\cong 0.577$)；$\tau_s$ 为基体剪切强度；$d$ 为纤维间距。

(4)最大纤维端部间隙的概率分布

对于示于图 6.11(b)中的二维排列的情形，Hikami 和 Chou(1984)分析了纤维端部间隙尺寸，注意力主要集中于单个纤维端部。导出了该纤维端部是在由 $n$ 个纤维端部聚集所组成的间隙中的概率 $P_n$ 为

$$P_n = n\beta^{n-1}(1-\beta)^2 \tag{6.30}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1 \tag{6.31}$$

某个给定的纤维末端不在含有大于 $n$ 个纤维端部的任一间隙中的概率为

$$Q_n = 1 - \sum_{i=n+1}^{\infty} P_i \tag{6.32}$$

当上述的概率对每根纤维是独立时，无大于尺寸 $n$ 的间隙的概率为

$$\tilde{P}(n) = Q_n^N \tag{6.33}$$

其中 $N$ 是复合材料中的纤维数。可是，实际上，对于某一给定纤维的 $Q_n$ 是与其他纤维有关的。当 $N$ 比平均间隙尺寸 $\bar{n}$ 大得多时，式(6.33)的 $\tilde{P}(n)$ 更适宜用下式来表达

$$\tilde{P}(n) = Q_n^{N/\bar{n}} \tag{6.34}$$

其中

$$\bar{n} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n \tag{6.35}$$

使用式(6.30)和式(6.32)，则式(6.34)可以重新写作为

$$\tilde{P}_n = \{1 - \beta^n[n(1-\beta)+1]\}^{N\beta} \tag{6.36}$$

其中

$$\beta' = \frac{1}{n} = \frac{1-\beta}{1+\beta} \tag{6.37}$$

由 $\tilde{P}(n)$ 及间隙尺寸 $n$ 与相应的应力集中关系即可确定短纤维复合材料的强度。图 6.14 表出了 $\tilde{P}(n)$ 随 $N$ 和 $\beta$ 的变化情况，该图表明，$\tilde{P}(n)$ 的行为像一个级函数，而且，当 $n \cong M$ 时，$\tilde{P}(n)$ 从 0 到 1 之间变化，其中，$M$ 从下式确定

$$\beta^M[M(1-\beta)+1]N\beta' = 1 \tag{6.38}$$

从上式求得的 $M$ 被称为**最可能的最大间隙尺寸**。图 6.15 示出了 $M$ 随 $\beta$ 和 $N$ 的变化情况。对于实际的复合材料，$M$ 值随 $\beta$ 和 $N$ 的变化不显著。当 $N$ 足够大时，使用公式 $1-x \cong \exp(-x)$，$\tilde{P}(n)$ 就可以近似为

$$\tilde{P}(n) \cong \exp[-N\beta^n n(1-\beta)^2] \tag{6.39}$$

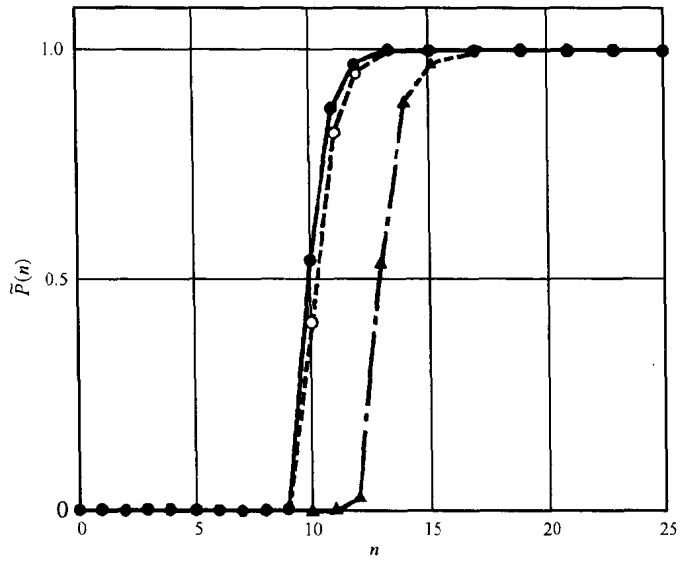



图 6.14　最大纤维端部间隙尺寸的累积分布函数

○:$N = 10^6, \beta = 0.2$;●:$N - 10^6, \beta = 0.1$;▲:$N = 10^8, \beta = 0.2$

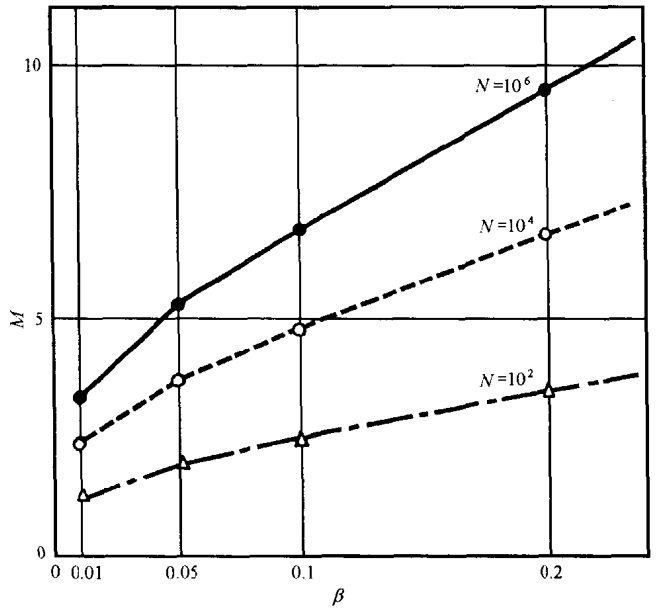



图 6.15　不同 $N$ 值(纤维总数)时的最可能的
最大间隙尺寸 $M$ 随临界带参数 $\beta$ 的变化趋势

(5)强度估计

基于纤维端部间隙尺寸和应力集中的考虑,Hikami 和 Chou(1984)对短纤维

复合材料的强度提出了一种修正的混合法则。复合材料的最终强度 $\sigma_{cu}$ 定义为复合材料断裂发生时的应力水平。根据上述所讨论的近似性，给出 $\sigma_{cu}$ 为

$$\sigma_{cu} = \sigma_a V_f + \sigma'_{mu}(1 - V_f) \tag{6.40}$$

式中，$\sigma'_{mu}$ 为当纤维达到其最终应变时的基体应力；$\sigma_a$ 为当应力集中处的纤维应力达到 $\sigma_{fu}$ 时，在此瞬时的纤维施加应力。这样，对于弱局部荷载分担法则，$\sigma_a$ 满足

$$\sigma_{fu} = K[\sigma_a - \eta\sigma_{my}(1 - V_f)/V_f] \tag{6.41}$$

式中，$K = K_b$ 或 $\tilde{K}_b$；$\sigma_{my}$ 为基体屈服强度。式(6.41)中的参数 $\eta$ 反映了在纤维端部间隙中的基体的受载条件。如果基体是脆性的，那么，在完整的桥式纤维破坏前，裂纹可以在沿纤维端部间隙的基体中扩展。在这一情形中，纤维端部间隙中的基体将不承受荷载，而 $\eta$ 应为 0。然而，在某一塑性基体复合材料中，纤维端部间隙中的基体可以发生塑性变形至其屈服强度 $\sigma_{my}$。于是，在纤维端部间隙中的每根纤维，均承担应力 $\sigma_{my}(1-V_f)/V_f$，从而使施加应力 $\sigma_a$ 减小，此时，$\eta=1$。由于复合材料的破坏始于最弱点，故式(6.38)中的最可能的最大间隙尺寸 $M$，应使用应力集中因子 $K_1^l$ 和 $K_1^u$。

在三维纤维排列的情形中，问题更加复杂，尚无精确可用的统计研究。对于某一给定的末端纤维数，不能惟一地定义纤维端部间隙的形状，要获得完整桥式纤维中的最大应力集中因子是十分麻烦的。此外，三维情形的纤维破坏过程比二维情形的更复杂。Fukuda 和 Chou(1981)绕过这些困难，仅取紧密的纤维端部间隙作为首要的近似。Hikami 和 Chou(1984)遵循这一近似，考虑了由末端纤维是正方形排列所组成的纤维端部间隙的一种特殊类型。这种纤维端部间隙的典型例子如图 6.16 所示，其中，在二维正方形格子中，端部纤维用实心圆表示，桥式纤维用空心圆表示。从而获得最可能的最大间隙尺寸的近似表达式及复合材料强度，有关的详细推导请参阅参考文献。

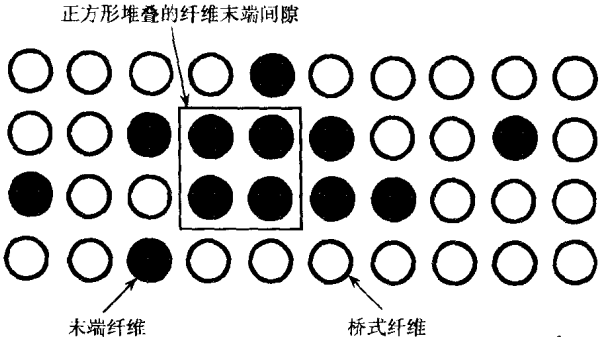



图 6.16　三维纤维排列的横截面示意图

对于弹性基体的情形，纤维体积分数 $V_f$ 与 $\sigma_{cu}/\sigma'_{mu}$ 之间的关系示于图 6.17 中。采用的是玻璃纤维/热塑性塑料基复合材料的性能，纤维长度 $l=1$ mm，纤维直径

$d_f=0.01$ mm，纤维临界长度 $l_c=0.1$ mm，临界带参数 $\beta=0.1$，$\sigma_{fu}/\sigma'_{mu}=E_f/E_m=35.2$。

在图 6.17 中，线 $A$ 表示对连续纤维由简单混合法则求得的结果，而线 $B$ 则表示对短纤维由修正的混合法则所求得的结果。两种情形均未考虑局部应力集中效应。点划线和细实线分别表示 Hikami 和 Chou(1984)基于弱局部荷载分担法则对二维和三维纤维排列所求得的结果。期望复合材料的强度位于这两个范围之间。由于局部应力集中，Hikami 和 Chou 所预报的强度远小于按混合法则所求得的值。

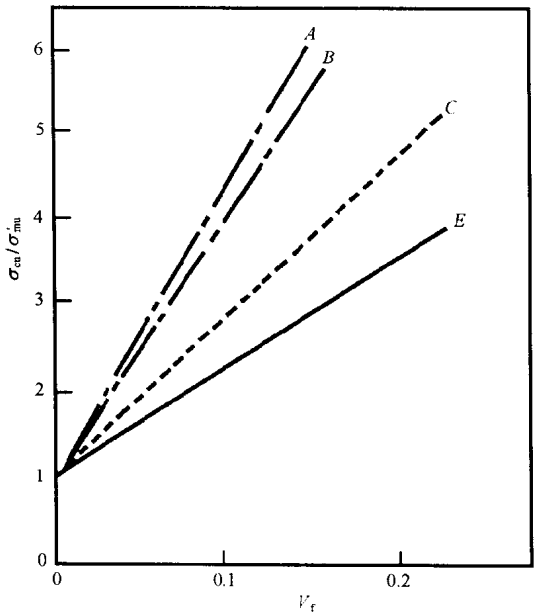



图 6.17　复合材料强度随纤维体积分数的变化趋势

$A$：混合法则；$B$：Kelly 和 Tyson(1956)；

$C$：三维纤维排列，弱局部荷载分担；$E$：二维纤维排列，弱局部荷载分担

### 6.2.2　纤维带有方向性的短纤维复合材料

在连续纤维复合材料的强度方程中，Cox(1952)首次提出了**方位因子**的概念，以便计及纤维偏轴铺排的情形。Bowyer 和 Bader(1972)在其短纤维系统的研究中，采用了这一概念，并用方位因子 $C_0$ 乘以式(6.19)右边的纤维从属项对其进行修正。对于完全直线排列的纤维，$C_0=1$，而对于偏轴铺排纤维，假定 $C_0$ 值小于 1。Bowyer 和 Bader 指出，方位因子与应变无关，它起码在小应变时对所有的纤维长度是相同的。于是，方位因子就可以根据纤维长度分布、界面黏结强度及复合材料最终强度从式(6.19)中求得。

Curtis、Bader 和 Bailey(1978)研究了玻璃及碳纤维增强聚酰胺热塑性塑料的强度，并根据所测定的复合材料模量及纤维和基体性能，计算了纤维方位因子。他

们的结果表明，纤维方位因子随纤维体积分数的增加而增大，符合光学显微图的定性分析。

通常，当纤维长度和方位两者均有变化时，可以将混合法则（式(6.11)）修正为

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu} V_f F(l_c/\bar{l}) C_0 + \sigma'_{mu}(1 - V_f) \tag{6.42}$$

其中的因子 $F(l_c/\bar{l})$ 是纤维平均长度 $\bar{l}$ 和临界长度 $l_c$ 的某一函数。例如，式(6.14)给出了均匀长度的直线排列的短纤维的 $F(l_c/\bar{l})$ 的形式。如果已知关于纤维方位所需要的资料，那么，就可以分析地估计 $C_0$。

Fukuda 和 Chou(1982)采用统计理论来预报具有可变纤维长度及方位的短纤维复合材料的强度。他们引进两种概率密度函数来描述纤维长度和方位分布，并在这一特殊的论述中忽略了应力集中效应，仅以平均值的形式给出了复合材料强度的分析结果。下面分 3 个部分来介绍 Fukuda 和 Chou 的理论。

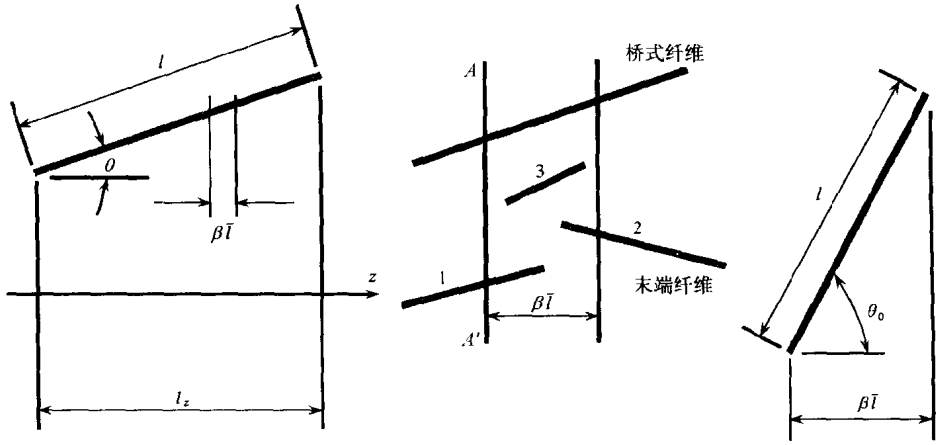
1. 单根短纤维的几何考虑

首先描述单根短纤维的几何排列。图 6.18(a)示出了一根长为 $l$ 并倾斜放置的短纤维。依据 6.2.1 中的术语，在图 6.18(b)中定义了桥式纤维和末端纤维，即，如果某根纤维跨越宽度为 $\beta\bar{l}$ 的临界带（参见 6.2.1），该纤维就称为桥式纤维；如果某根纤维的端部在临界带内，它就被定义为末端纤维。这里，$\bar{l}$ 表示平均纤维长度。纤维长度分布的概率密度函数 $h(l)$ 应满足下列条件：

$$\int_0^\infty h(l)\mathrm{d}l = 1 \tag{6.43}$$

于是，平均纤维长度就定义为

$$\bar{l} = \int_0^\infty l h(l)\mathrm{d}l \tag{6.44}$$




(a) 带方向性的纤维　(b) 末端纤维和桥式纤维　(c) 临界角

图 6.18　短纤维排列的几种标示法

从图 6.18(a)中

$$l_z = l\cos\theta \tag{6.45}$$

如果长为 $l$ 的某根纤维在某一角度内是桥式纤维，则此角就称为**临界角**($\theta_0$)。对于 $\beta\bar{l} \leqslant l$，据图 6.18(c)，有

$$\theta_0 = \cos^{-1}\frac{\beta\bar{l}}{l} \tag{6.46}$$

如果 $\beta\bar{l} > l$，$\theta_0$ 就无法定义，在这种情形中的纤维必然是一根末端纤维。如果纤维在 $z$ 轴方向是随机分布的，则长为 $l$ 的某根纤维在临界带内是末端纤维的概率 $P_e$ 为

$$P_e = \frac{\beta\bar{l}}{l_z} = \begin{cases} \beta\bar{l}/(l\cos\theta), & 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 \text{ 和 } \beta\bar{l} \leqslant l \\ 1, & \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2 \text{ 或 } \beta\bar{l} \geqslant l \end{cases} \tag{6.47}$$

发现一根桥式纤维的概率 $P_b$ 则为

$$P_b = 1 - P_e \tag{6.48}$$

关于纤维方位角的概率密度函数 $g(\theta)$ 应满足条件

$$\int_0^{\pi/2} g(\theta)\mathrm{d}\theta = 1 \tag{6.49}$$

2. 在短纤维中的荷载传递

首先，考虑一根沿 $z$ 轴方向并与施加拉伸应力 $\sigma_0$ 平行的纤维，其平均纤维应力是

$$\bar{\sigma}_{f0} = \frac{1}{l}\int_0^l \sigma_f(z)\mathrm{d}z \tag{6.50}$$

通常，纤维轴向应力 $\sigma_f(z)$ 具有图 6.1 所示的轮廓。假定界面切应力为常量(见图 6.7)，则 $\sigma_f(z)$ 具有最简单的形式。于是，$\bar{\sigma}_{f0}$ 成为

$$\bar{\sigma}_{f0} = \begin{cases} \sigma_{fu}\left(1 - \dfrac{l_c}{2l}\right), & l > l_c \\ \sigma_{fu}\left(\dfrac{l}{2l_c}\right), & l < l_c \end{cases} \tag{6.51}$$

在纤维横截面 $A_f$ 中的平均力为 $\bar{\sigma}_{f0}A_f$。

其次，考虑一根与施加应力 $\sigma_0$ 成夹角 $\theta$ 的纤维。施加应力可以分解为沿纤维轴的正应力分量和垂直于纤维轴的切应力分量，即

$$\left.\begin{aligned} \sigma_0' &= \sigma_0\cos^2\theta \\ \tau_0' &= \sigma_0\sin\theta\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{6.52}$$

如果忽略 $\tau_0'$ 对纤维应力分布的影响，那么，纤维的平均力就成为 $\bar{\sigma}_{f0}A_f\cos^2\theta$，而 $z$ 方向的力分量则是

$$F_z = \bar{\sigma}_{f0}A_f\cos^3\theta \tag{6.53}$$

3. 短纤维复合材料的强度

根据上述的准备，就可以导出短纤维复合材料的强度。在下面的讨论中，假定

$h(l)$和 $g(\theta)$是互相独立的，这意味着 $g(\theta)$对所有具有不同的纤维长度分布的试样是相同的。考虑一个长方体试样，其 3 条互垂边的长度分别用 $a$，$b$ 和 $c$ 表示，置 $c$ 轴平行于 $z$ 轴。试样的体积是

$$V = abc \tag{6.54}$$

根据纤维体积分数的定义，$V_f$ 成为

$$V_f = NA_f\bar{l}/V \tag{6.55}$$

式中，$N$ 和 $A_f$ 分别表示纤维总数和纤维横截面面积。

回忆一下式(6.46)给出的纤维在 $z$ 轴上的投影长度，于是，纤维投影的平均长度可以写为

$$\bar{l}_z = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} l\cos\theta h(l)g(\theta)\mathrm{d}l\mathrm{d}\theta = \bar{l}\int_0^{\pi/2} g(\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta \tag{6.56}$$

$N\bar{l}_z$ 值给出了全部纤维在 $z$ 轴上投影的总长度，如果用该值除以试样长度 $c$，那么，就可以求出穿过在试样中垂直于 $z$ 轴的任一截面的纤维平均数，即

$$N_c = \frac{N\bar{l}_z}{c} = \frac{abV_f}{A_f}\int_0^{\pi/2} g(\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta \tag{6.57}$$

式(6.47)给出了一个特定纤维是末端纤维的概率。因此，发现任意一根纤维是末端纤维的平均概率是

$$Q_e = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} P_e h(l)g(\theta)\mathrm{d}l\mathrm{d}\ \theta \tag{6.58}$$

类似地，发现任意一根纤维是桥式纤维的平均概率是

$$Q_b = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} P_b h(l)g(\theta)\mathrm{d}l\mathrm{d}\theta = 1 - Q_e \tag{6.59}$$

将式(6.47)和式(6.48)代入式(6.58)和式(6.59)，有

$$Q_e = \int_0^{\theta_0}\left[\int_0^{\beta l} h(l)g(\theta)\mathrm{d}l + \int_{\beta l}^{\infty}\frac{\beta\bar{l}}{l\cos\theta}h(l)g(\theta)\mathrm{d}l\right]\mathrm{d}\theta + \int_{\theta_0}^{\pi/2}\int_{\beta l}^{\infty} h(l)g(\theta)\mathrm{d}l\mathrm{d}\theta \tag{6.60}$$

$$Q_b = \int_{\beta l}^{\infty}\left[\int_0^{\vartheta_0}\left(1 - \frac{\beta\bar{l}}{l\cos\theta}\right)h(l)g(\theta)\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}l \tag{6.61}$$

于是，在试样中的末端纤维和桥式纤维的总数分别是

$$N_e = N_c Q_e, \quad N_b = N_c Q_b \tag{6.62}$$

严格地说，$N_e$ 值是不精确的，因为仅检验了一个横截面，如图 6.17(b)所示的截面 $AA'$，用 2 和 3 所表示的纤维也未加考虑。可是，我们的目的是计算桥式纤维的数目，在随后的讨论中，它是不受 $N_e$ 影响的。

基于式(6.53)，对于一根特定纤维的轴向力的 $z$ 方向的分量，桥式纤维之一的平均值是

$$F_z = \int_0^{\vartheta_0}\int_{\beta l}^{\infty} F_z h(l)g(\theta)\mathrm{d}l\mathrm{d}\theta \tag{6.63}$$

于是，处于宽为 $\beta\bar{l}$ 的临界带中的所有桥式纤维承受的总荷载是

$$F_t = N_b \bar{F}_z \tag{6.64}$$

复合材料的强度为

$$\sigma_{cu} = \frac{F_t}{ab} + \sigma'_{mu}(1 - V_f) \tag{6.65}$$

其中，已假定基体承担了部分施加荷载。将式(6.51)，式(6.53)和式(6.57)代入式(6.60)～(6.64)，就可以确定复合材料的最终强度

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu} V_f \int_0^{\pi/2} g(\theta)\cos\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{\theta_0} g(\theta)\cos^3\theta \mathrm{d}\theta \times \int_{\beta\bar{l}}^{\infty} \int_0^{\theta_0} \left(1 - \frac{\beta\bar{l}}{l\cos\theta}\right) g(\theta)\mathrm{d}\theta h(l)\mathrm{d}l$$
$$\times \left[\int_{\beta\bar{l}}^{l_c} \frac{l}{2l_c} h(l)\mathrm{d}l + \int_{l_c}^{\infty} \left(1 - \frac{l_c}{2l}\right) h(l)\mathrm{d}l\right] + \sigma'_{mu}(1 - V_f) \tag{6.66}$$

上式是短纤维复合材料强度的一般表达式。为了进一步进行分析，需要知道函数 $g(\theta)$ 和 $h(l)$ 连同 $\sigma_{fu}$，$\sigma'_{mu}$，$V_f$ 和 $l_c$。

下面讨论一下式(6.66)的一些极限情形。首先，考虑具有均匀纤维长度 $\bar{l}$ 的单向短纤维复合材料，式(6.66)可以缩减为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_c &= \sigma_{fu} V_f (1 - \beta)\left(1 - \frac{l_c}{2\bar{l}}\right) + \sigma'_{mu}(1 - V_f), \quad \bar{l} > l_c \\ \sigma_c &= \sigma_{fu} V_f (1 - \beta)\frac{\bar{l}}{2l_c} + \sigma'_{mu}(1 - V_f), \bar{l} < l_c \end{aligned}\right\} \tag{6.67}$$

上式与 Bader、Chou 和 Quigley(1979)的原破坏模型的结果相符。

其次，考虑纤维长度分布对单向复合材料强度的影响。通过假定 $\beta \to 0$ 的极限情形(即所有的纤维均为桥式纤维)及下列纤维长度分布的概率密度函数：

$$h(l) = \frac{\pi}{4\bar{l}}\sin\frac{\pi l}{2\bar{l}}, \quad 0 \leqslant \frac{l}{\bar{l}} \leqslant 2 \tag{6.68}$$

式(6.66)就缩减为

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu} V_f \left\{\frac{1}{2} + \frac{\bar{l}}{2\pi l_c}\sin\left(\frac{\pi l_c}{2\bar{l}}\right) + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi l_c}{2\bar{l}}\right) - \frac{\pi l_c}{8\bar{l}}\left[\mathrm{Si}(\pi) - \mathrm{Si}\left(\frac{\pi l_c}{2\bar{l}}\right)\right]\right\}$$
$$+ \sigma'_{mu}(1 - V_f) \tag{6.69}$$

其中的 $\mathrm{Si}(x)$ 是由下式定义的正弦积分函数：

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \tag{6.70}$$

式(6.69)中 $F(l_c/\bar{l})$ 的结果用细实线示于图 6.19 中。在纤维长度为常量的情形中，从式(6.14)中可以求出强度，其值用虚线也示于图 6.19 中。从该图可以得出结论，如果纤维长度不是均匀的，复合材料的强度将有所降低。可是，在非均匀纤维长度系统(式(6.68))与均匀纤维长度系统之间的复合材料强度中，其差别不是很明显，因此，可以使用基于平均纤维长度的普通理论作为一个基本的近似。

作为第 3 个例子，考虑均匀纤维长度及偏轴纤维定向分布的情形。考察下列两种类型的纤维方位：

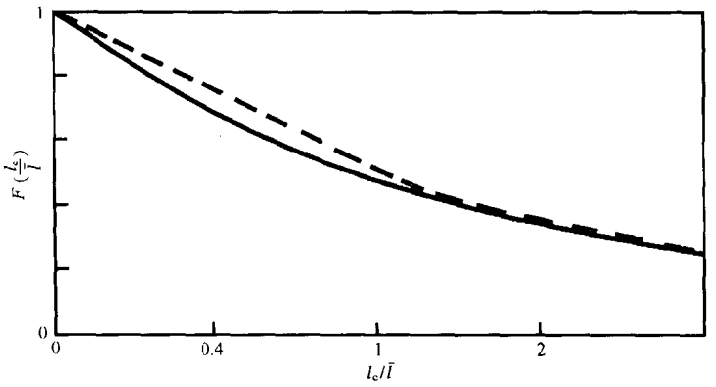



图 6.19　$F(l_c/\bar{l})$与 $l_c/\bar{l}$ 的关系

实线:考虑纤维长度分布;虚线:假定纤维长度为常量

1)$g(\theta)=1/\alpha(0\leqslant\theta\leqslant\alpha)$和 $g(\theta)=0(\theta>\alpha)$。

2)$g(\theta)=(\pi/2\alpha)\cos(\pi\theta/2\alpha)(0\leqslant\theta\leqslant\alpha)$和 $g(\theta)=0(\theta>\alpha)$。

取这些函数是为了满足式(6.49)。这些函数的形状用图示于图 6.20 中,而 $\theta$ 则在图 6.21 的三维图中给出定义。注意,$g(\theta)$不是指单位面积的概率。单位面积的概率与 $g(\theta)/\sin\theta$ 成正比。再考虑 $\beta\to0$ 的极限,在这个极限中,式(6.46)的 $\theta_0$ 趋于 $\pi/2$。考虑这个条件,对于上述两种类型的 $g(\theta)$,从式(6.66)中求出 $C_0$:

$$\lim_{\beta\to0}C_0=\frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{12}\sin3\alpha-\frac{3}{4}\sin\alpha\right) \tag{6.71}$$

$$\lim_{\beta\to0}C_0=\frac{1}{16}\left[\frac{1}{1+q}\sin\frac{\pi}{2}(1+q)+\frac{1}{1-q}\sin\frac{\pi}{2}(1-q)\right]$$

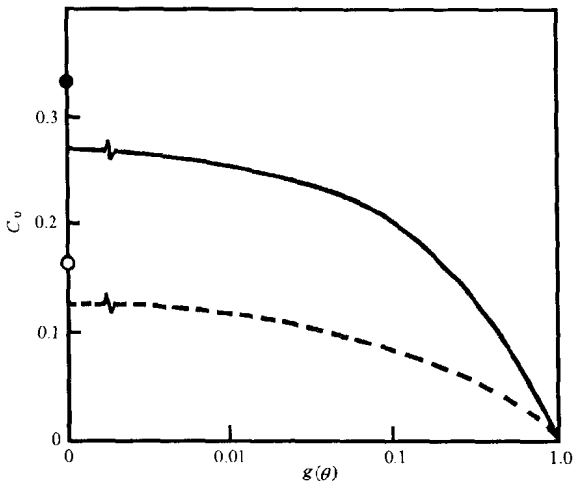



图 6.20　两类纤维方位分布的 $C_0$ 值

实线:二维随机排列;虚线:三维随机排列;实心和空心圆为 Cox 结果

$$\times\left[\frac{3}{1+q}\sin\frac{\pi}{2}(1+q)+\frac{3}{1-q}\sin\frac{\pi}{2}(1-q)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{1+3q}\sin\frac{\pi}{2}(1+3q)+\frac{1}{1-3q}\sin\frac{\pi}{2}(1-3q)\right] \tag{6.72}$$

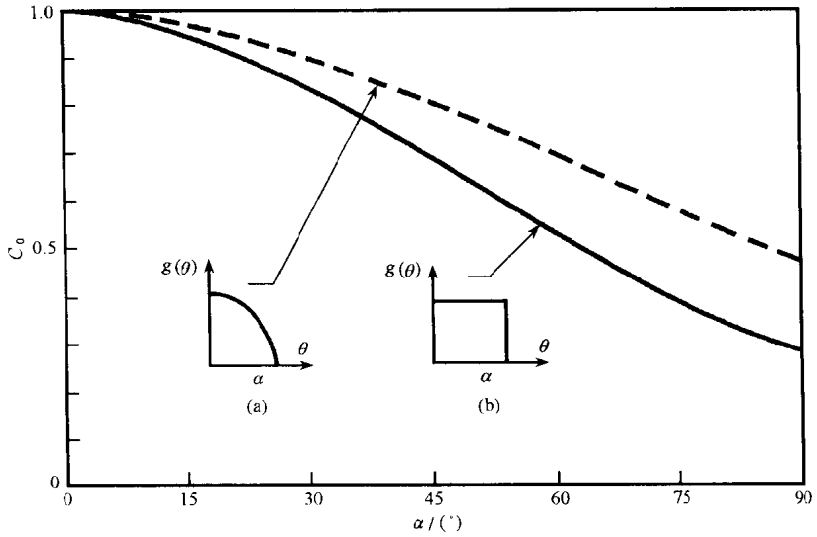



图 6.21　随机纤维排列的纤维方位因子 $C_0$

实线：二维随机排列；虚线：三维随机排列

其中，$q=2\alpha/\pi$。这些结果示于图 6.20 中。Bower 和 Bader 用他们的实验数据估算了 $C_0$ 值。对于实验所使用的玻璃/尼龙注射模塑材料，$C_0$ 为 0.66。对于 $g(\theta)$，如果采用矩形分布，则从图 6.21 中，相应于 $C_0=0.66$ 的值近似是 45°。

### 6.2.3　随机短纤维复合材料

Lees(1968)和 Chen(1971)试图采用平均技术来研究随机短纤维复合材料的强度，他们采纳 Stowell 和 Liu(1961)和 Jackson Cratchley(1966)提出的破坏机制，即，在平面应变中发生纤维断裂、基体剪切破坏及基体开裂。按纤维方向与施加应力方向的夹角来研究复合材料中起作用的破坏机制

$$\sigma_c=\begin{cases}\sigma_1=\sigma_c'\cos^2\theta, & 0\leqslant\theta\leqslant\theta_1\\ \sigma_2=\tau_m/(\sin\theta\cos\theta), & \theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2\\ \sigma_3=\sigma_m/\sin^2\theta, & \theta_2\leqslant\theta\leqslant\pi/2\end{cases} \tag{6.73}$$

式中，$\sigma_c'$ 表示由混合法则型的关系给出的沿单向复合材料的纤维方向的强度；$\tau_m$ 和 $\sigma_m$ 分别为基体和界面的剪切破坏应力和拉伸破坏应力。由纤维-纤维相互作用引起的局部应力扰动也可以包含在式(6.73)的 $\sigma_1$ 中。通过考虑具有角度的强度依赖性作为分段连续的函数，并从 0°到 90°进行积分，就可以获得随机短纤维复合材料的强度

$$\sigma_c = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\theta_1}\sigma_1 d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta_2}\sigma_2 d\theta + \int_{\theta_2}^{\pi/2}\sigma_3 d\theta\right] \tag{6.74}$$

这一方法的估计值较好地符合玻璃纤维增强聚乙烯和 PMMA 随机毡垫以及随机 $Al_2O_3$-铝-硅和玻璃环氧复合材料的实验结果。

Fukuda 和 Chou(1982)的强度估计方法也可以用来确定随机短纤维复合材料的方位因子 $C_0$(式(6.42))。假定纤维长度是均匀的并大于临界长度 $l_c$,式(6.66)就成为

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu}V_f\left(1 - \frac{l_c}{2l}\right)\int_0^{\pi/2} g(\theta)\cos\theta d\theta \int_0^{\theta_0} g(\theta)\cos^3\theta d\theta$$
$$\times \int_0^{\theta_0}\left(1 - \frac{\beta}{\cos\theta}\right) g(\theta)d\theta + \sigma'_{mu}(1 - V_f) \tag{6.75}$$

比较式(6.42)和式(6.75),就可以获得 $C_0$ 的表达式

$$C_0 = \int_0^{\pi/2} g(\theta)\cos\theta d\theta \int_0^{\theta_0} g(\theta)\cos^3\theta d\theta \int_0^{\theta_0}\left(1 - \frac{\beta}{\cos\theta}\right) g(\theta)d\theta \tag{6.76}$$

现在,考虑二维和三维随机纤维排列这两种情形。在二维随机排列模型中,$g(\theta)$在 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ 的整个范围内必须是常量,据式(6.49),有

$$g(\theta) = 2\pi \tag{6.77}$$

将上式代入式(6.76)中,有

$$C_0 = \frac{8}{3\pi^3}(2 + \beta^2)(1 - \beta^2)^{1/2}\left[\cos^{-1}\beta - \frac{1}{2}\beta\log\left(\frac{1 + \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}\right)\right] \tag{6.78}$$

这一结果用细实线绘于图 6.21 中。当 $\beta$ 增加时,复合材料含有更多的末端纤维和较少的桥式纤维,因此,纤维的增强效应减小。在 $\beta \to 0$ 的极限中,全部纤维均为桥式纤维,对于二维情形,$C_0$ 趋于 0.27。Bowyer 和 Bader(1972)引用 Cox(1952)关于随机短纤维复合材料杨氏模量的方位因子的结果,取 $C_0 = 1/3$。Cox 的结果用实心圆表示绘于图 6.20 中。

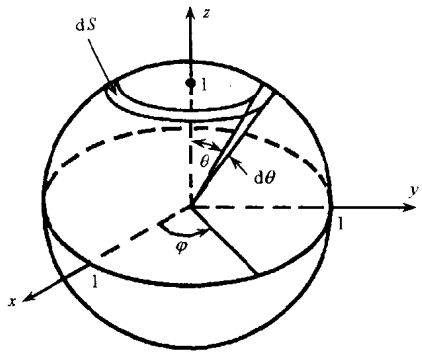



图 6.22　轴对称纤维方位分布

在三维随机纤维排列模型中,参考图 6.22,$g(\theta)$可以表达为

$$g(\theta)d\theta = dS/S \tag{6.79}$$

式中,$S$ 为半球表面面积。因此

$$g(\theta) = \sin\theta \tag{6.80}$$

在这一情形中,式(6.76)成为

$$C_0 = \frac{1}{8}(1 - \beta^2)(1 + \beta^2)(1 - \beta + \beta\log\beta) \tag{6.81}$$

这一结果用虚线示于图 6.20 中。在 $\beta \to 0$ 的极限中，$C_0$ 趋于 1/8，此值再次小于用空心圆所表示的 Cox 的估计值(1/6)。

## 6.3 短纤维复合材料的断裂行为

在各种类型的短纤维复合材料中，人们比较了解树脂基复合材料的断裂行为。短纤维复合材料的破坏通常始于微观空隙和细观裂纹，这些缺陷存在于增强相、基体和介相中，在复合材料的制作过程中，也会产生缺陷。Friedrich(1989)认为，短纤维复合材料的最终破坏是几种细观力学作用过程的结果，断裂的宏观外貌取决于这些作用过程中哪一个控制着整个破坏过程。

Friedrich(1985，1989)等认为，短纤维复合材料的主要破坏机制包括：①基体变形和断裂；②纤维/基体脱胶；③纤维拔出；④纤维断裂。裂纹穿过某一短纤维增强树脂的路径示于图 6.23 中，各自的破坏机制也用图示的方式给出了说明。

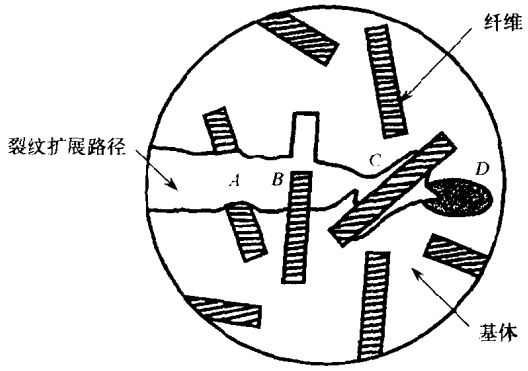



图 6.23 裂纹穿过某一短纤维增强树脂的路径示意图

*A* 为纤维断裂；*B* 为纤维拔出；*C* 为纤维/基体脱粘；*D* 为塑性变形和树脂基的破坏

某一特定的破坏机制发生的程度取决于纤维、基体和介相，以及纤维的几何形状和排列。正如上述所讨论的那样，某根纤维与其周围基体之间的荷载传递效率取决于纤维与其临界长度($l_c$)有关的长度。如果纤维的长度小于 $l_c$，纤维拔出及基体破坏是能量吸收的占优机制。另一方面，当纤维长度大于 $l_c$ 时，在某些情形中，纤维将发生断裂，而在其他情形中，纤维将被拔出；关于裂纹的纤维位置和方位在确定何种破坏机制发生中是一个重要因素。

Friedrich(1989)检验了直线排列的短纤维复合材料的断裂能，并给出了如下的观察：

1) 基体材料提供了部分的复合材料断裂能。对于某种脆性树脂基体，与纤维断裂或界面破坏相比较，该部分是较小的。于是，作为纤维增强的结果，复合材料断

裂能高于未填充的基体的断裂能。可是，在塑性树脂基体的情形中，断裂过程的能量吸收却高于由涉及作用过程的纤维而产生的能量吸收。这样，断裂能随纤维体积分数的增加而减小。

2）影响纤维临界长度（式(6.12)）的纤维/基体界面剪切强度强烈地受到环境的温度影响。较高的温度导致较大的 $l_c$。此外，温度也影响基体的断裂行为。

短纤维复合材料的断裂韧度（$K_c=\sqrt{G_cE_c}$）与断裂能（$G_c$）及弹性模量（$E_c$）有关。关于这一关系可以做一些定性观察。首先，对脆性树脂基体来说，纤维的增加可使 $K_c$ 增加，这是由于 $G_c$ 及 $E_c$ 同时增加。其次，对十分塑性的热塑性塑料基体来说，纤维的增加导致 $E_c$ 的增加，但 $G_c$ 减小。因此，$K_c$ 可能减小或保持不变。还应注意到，纤维的增加可能对基体引起抑制效应，并可导致应力状态的改变，从而导致基体的可塑性降低和纤维末端的应力集中。应力集中对短纤维复合材料断裂的影响将在下面讨论。

McLaughlin(1966)首次进行了验明纤维末端应力集中的实验研究，他使用光测弹性方法来研究纤维末端形状及间隙尺寸对单根短纤维附近的切应力的影响。McLaughlin(1968)把光测弹性研究推广到两侧是连续纤维的末端为正方形的短纤维。Chen 和 Lavengood(1969)也使用光测弹性方法来检验末端为正方形的短纤维周围的纤维应力及界面切应力分布。

在 6.1 节中曾经讨论过纤维末端应力集中的理论分析。许多研究者也提供了分析解答，特别强调纤维末端间隔距离、纤维体积分数、纤维/基体模量比及纤维端部的几何性质。从这些分析中可以得出几个普遍的结论：①影响应力集中的主要参数是间隙尺寸、纤维体积分数及纤维/基体模量比；②方形端部纤维及锥形端部纤维比圆形纤维给出较高的应力集中；③应力集中随纤维末端的间隔距离的减小而增加；④与纤维端部间隙填满基体的情形比较，当纤维端部间隙是空隙时，在纤维/基体界面处存在较高的应力集中。在实际的复合材料中，纤维末端通常是倾斜的，并且是凹凸不平的，纤维端部间隔距离的概念也很难应用于随机分布的纤维系统及纤维有倾角的系统。上述概括的应力分析的重要发现是，在纤维间断处附近的基体的应力集中，甚至在中等的荷载水平下，也是十分严重的。或者由基体的破坏或者由脱胶引起的复合材料破坏的起始很可能发生在这些位置。

## 思 考 题

6.1 试指出短纤维复合材料的应力传递机制及短纤维的增强机制。

6.2 试根据图 6.4，求出单根半无限长纤维及纤维间距为 $d$ 的两根半无限长纤维的轴向荷载分布。

6.3 单向短纤维复合材料的轴向拉伸破坏过程有何特点？

6.4　在纤维具有方向性的短纤维复合材料中，方位因子 $C_0$ 与哪些因素有关？Fukuda 和 Chou 是如何确定 $C_0$ 的？与随机短纤维复合材料中的 $C_0$ 比较，其值有何变化？

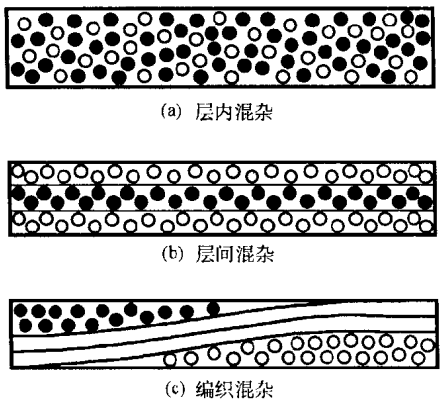
6.5　试简要叙述短纤维复合材料的断裂行为，并指出影响短纤维复合材料破坏机制的主要因素。

# 第七章　混杂复合材料的拉伸破坏机制及混杂效应

由两种(或两种以上)纤维为增强相的复合材料称为混杂复合材料，此类材料与单一纤维复合材料相比具有许多优点。本章将剪滞理论和统计理论进行推广，研究了层内和层间混杂复合材料在轴向拉伸荷载作用下的破坏机制及协同效应，并计及纤维/基体界面损伤和层间界面破坏对应力集中、拉伸破坏应变及混杂效应的影响。

## 7.1　概　　述

**混杂复合材料**这个术语通常用来描述含有两种或两种以上纤维为增强相的复合材料。此类复合材料是引人注意的结构材料，它们可以为设计者们提供制作复合材料和获取优异性能的新选择。使用混杂复合材料的最初动机是利用它所带来的经济效益，即用价格低廉的玻璃和芳纶纤维来部分取代价格昂贵的碳和硼纤维。例如，仅 20%的碳纤维与玻璃纤维混杂后的复合材料的强度和刚度可达到单一碳纤维增强复合材料的 75%，但其成本降低了大约 70%。更重要的是，混杂复合材料允许在更大范围内选择材料的特性，在进行材料设计时，相对于单一纤维增强复合材料有着更大的灵活性。例如，通过适当选取不同种类的纤维混杂而制成的混杂复合材料，其抗拉强度和抗疲劳性能有时可得到明显提高。而且，不用牺牲过多的力学性能就可达到改善**割口敏感性**、提高**断裂韧性**、延长**疲劳寿命**和降低**重量**的目的。基于上述理由，自 20 世纪 70 年代初开始，国内外不少学者曾对混杂复合材料的力学行为进行了广泛的研究，但由于问题的复杂性，关于混杂复合材料的破坏机制及协同效应等问题至今尚未得到很好的解决，仍有待进一步的研究。



(a) 层内混杂

(b) 层间混杂

(c) 编织混杂

图 7.1　混杂复合材料的类型

依据纤维和预浸层的排列方式，混杂复合材料可分为层内混杂、层间混杂和编织混杂等形式。如果不同种类的纤维相互混合并同时与基体浸润，它就称为**层内**混杂复合材料[见图 7.1(a)]；若由不同种类的单层板(每层仅含一种纤维)铺叠而成的叠层板，则称为**层间**混杂复合材料[见图 7.1(b)]；第三类混杂复合材料则由织

物增强相所组成，其中，每一织物含有两种或两种以上的纤维，它被称为**编织**混杂复合材料[见图 7.1(c)]。此外，还有由树脂基复合材料板、金属基复合材料板及金属薄片所组成的混杂复合材料，等等。当混杂叠层是由不同的基体板所组成时，则需要由压实步骤来制作，以便能与所有的基体材料兼容。

复合材料性能的优化通常可以通过纤维种类的某种适宜的结合来获得。混杂复合材料的增强相包括硼、碳、玻璃和芳纶纤维，对陶瓷和金属纤维等也有少量的应用。中等模量的环氧、热塑性塑料及聚酰胺则是制作混杂复合材料的普通树脂基。目前，混杂复合材料主要用来制作飞机的机身、机翼和尾部结构，直升飞机的旋转叶片，汽车部件，以及许多体育运动器材，如赛艇、赛车、自行车架及曲棍球球棍等。

有关混杂复合材料研究的基本问题是：①在组分纤维中荷载是如何分担的？②在不同种类的纤维中存在协同效应吗？③纤维种类的某些结合和细观结构设计是否产生全面符合需要的结构性能？为了基本了解这些问题，人们研究了混杂复合材料力学行为的各个方面。为了简化变形的考虑，下面仅讨论单向混杂复合材料及其叠层结构。

## 7.2 层内混杂复合材料的应力集中

在单向连续纤维混杂复合材料中，通常使用低模量(LM)和高模量(HM)的术语来区分两类纤维。对于像玻璃/碳及凯芙拉/碳这样组合的混杂复合材料，LM 和 HM 纤维则分别相应于高延伸(HE)和低延伸(LE)纤维。下面仍采用剪滞分析来讨论混杂复合材料中由纤维断裂导致的应力重新分布。

### 7.2.1 Fukuda 和 Chou 的剪滞理论

HM 纤维和 LM 纤维交替相间均匀排列的二维层内混杂复合材料单层，沿纤维方向受拉伸荷载作用(见图 7.2)。随着荷载的增加，某些纤维将发生逐步断裂(HM 纤维通常先发生断裂)，由此引起断口附近的局部应力重新分布。为叙述方便，每对相邻的 HM 和 LM 纤维被指定为第 $m$ 组，用“$*$”号来表示与 LM 纤维有关的量。

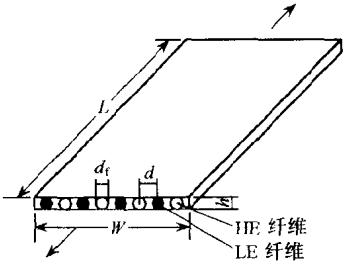



图 7.2 二维层内混杂复合材料单层试样

Fukuda 和 Chou(1983)曾经研究了纤维断裂的 3 种组合类型(见图 7.3)。令 $b_1$ 和 $b_2$ 分别为已断裂的 HM 纤维数和 LM 纤维数，这样，在图 7.3 中，(a)$b_1=b, b_2=0$；(b)$b_1=b, b_2=b-1$；(c)$b_1=b_2=b$。断纤维的计数由 $m=0$ 开始。

设 $p_m(x)$和 $p_m^*(x)$为第 $m$ 对纤维的轴向力，其轴向位移为 $u_m(x)$和 $u_m^*(x)$。$x=0$ 则表示纤维

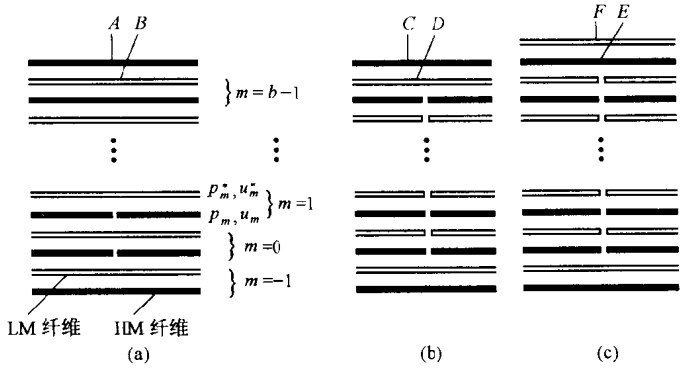



图 7.3　不连续纤维的排列

(a)$b_1=b$, $b_2=0$;(b)$b_1=b$, $b_2=b-1$;(c)$b_1=b_2=b$。

$b_1$ 和 $b_2$ 分别为断裂的 HM 纤维数和 LM 纤维数

断裂平面。根据剪滞分析假定,第 $m$ 根 HM 纤维和 LM 纤维的力平衡方程分别为

$$\left.\begin{aligned} E_f A_f \frac{d^2 u_m}{dx^2} + \frac{G_m h}{d}(u_m^* + u_{m-1}^* - 2u_m) = 0 \\ E_f^* A_f^* \frac{d^2 u_m^*}{dx^2} + \frac{G_m h}{d}(u_{m+1} + u_m - 2u_m^*) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

在线弹性条件的假定下,力与位移的关系为

$$p_m(x) = E_f A_f \frac{du_m(x)}{dx}, \quad p_m^*(x) = E_f^* A_f^* \frac{du_m^*(x)}{dx} \tag{7.2}$$

边界条件为

$$\left.\begin{aligned} &p_m(0) = 0, \quad p_m^*(0) = 0(\text{断裂纤维}) \\ &u_m(0) = 0, \quad u_m^*(0) = 0(\text{完整纤维}) \\ &p_m(\infty) = p(\text{所有 HM 纤维}) \\ &p_m^*(\infty) = \frac{E_f^* A_f^*}{E_f A_f} p(\text{所有 LM 纤维}) \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

引入以下无量纲参数:

$$\left.\begin{aligned} &P_m = p_m/p, \quad P_m^* = p_m^*/p \\ &U_m = \frac{u_m}{p}\sqrt{E_f A_f G_m h/d}, \quad U_m^* = \frac{u_m^*}{p}\sqrt{E_f A_f G_m h/d} \\ &\xi = \sqrt{G_m h/(E_f A_f d)}\,x, \quad R = E_f^* A_f^*/(E_f A_f) \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

这样,式(7.1)～(7.3)变为

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 U_m}{d\xi^2} + (U_m^* + U_{m-1}^* - 2U_m) = 0 \\ R\frac{d^2 U_m^*}{d\xi^2} + (U_{m+1} + U_m - 2U_m^*) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

$$P_m(\xi)=\frac{\mathrm{d}U_m(\xi)}{\mathrm{d}\xi},\quad P_m^*(\xi)=R\frac{\mathrm{d}U_m^*(\xi)}{\mathrm{d}\xi} \tag{7.6}$$

$$\left.\begin{aligned}&P_m(0)=0,\quad P_m^*(0)=0\quad(\text{断裂纤维})\\&U_m(0)=0,\quad U_m^*(0)=0(\text{完整纤维})\\&U_m(\infty)=1(\text{所有 HM 纤维})\\&P_m^*(\infty)=R(\text{所有 LM 纤维})\end{aligned}\right\} \tag{7.7}$$

采用 Hedgepeth(1961)提出的影响函数的概念,无量纲位移可以表达成

$$\left.\begin{aligned}U_m(\xi)&=\xi+\sum_{k=-\infty}^{\infty}V_{m-k}(\xi)U_k(0)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}W_{m-k}(\xi)U_k^*(0)\\U_m^*(\xi)&=\xi+\sum_{k=-\infty}^{\infty}V_{m-k}^*(\xi)U_k(0)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}W_{m-k}^*(\xi)U_k^*(0)\end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

式中,$V$,$V^*$,$W$ 和 $W^*$是影响函数。于是,从式(7.5)中,用影响函数获得下列两组方程。

(a)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2V_m}{\mathrm{d}\xi^2}+(V_m^*+V_{m-1}^*-2V_m)=0\\&R\frac{\mathrm{d}^2V_m^*}{\mathrm{d}\xi^2}-(V_{m+1}+V_m-2V_m^*)=0\end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

相应的边界条件为

$$\left.\begin{aligned}&V_m(0)=1(m=0),\quad V_m(0)=1(m\neq 0)\\&V_m^*(0)=0\\&\frac{\mathrm{d}V_m(\infty)}{\mathrm{d}\xi}=0,\frac{\mathrm{d}V_m^*(\infty)}{\mathrm{d}\xi}=0\end{aligned}\right\} \tag{7.10}$$

(b)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2W_m}{\mathrm{d}\xi^2}+(W_m^*+W_{m-1}^*-2W_m)=0\\&R\frac{\mathrm{d}^2W_m^*}{\mathrm{d}\xi^2}+(W_{m+1}+W_m-2W_m^*)=0\end{aligned}\right\} \tag{7.11}$$

相应的边界条件为

$$\left.\begin{aligned}&W_m(0)=0\\&W_m^*(0)=1(m=0),\quad W_m^*(0)=1(m\neq 0)\\&\frac{\mathrm{d}W_m(\infty)}{\mathrm{d}\xi}=0,\quad\frac{\mathrm{d}W_m^*(\infty)}{\mathrm{d}\xi}=0\end{aligned}\right\} \tag{7.12}$$

因为式(7.9)和式(7.11)形式上是相同的,所以,下面仅给出式(7.9)的求解步骤。为求解式(7.9),需引入下列的傅里叶级数展开式

$$\overline{V}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}V_m\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta},\quad\overline{V}^*=\sum_{m=-\infty}^{\infty}V_m^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta} \tag{7.13}$$

而展开式系数为

$$V_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{V} e^{im\theta} d\theta, \quad V_m^* = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{V}^* e^{im\theta} d\theta \tag{7.14}$$

于是，用 $e^{im\theta}$ 乘以式(7.9)再对所有的 $m$ 求和，有

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\bar{V}}{d\xi^2} - 2\bar{V} + A\bar{V}^* = 0 \\ &R\frac{d^2\bar{V}^*}{d\xi^2} - 2\bar{V} + B\bar{V} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.15}$$

其中

$$A = 1 + e^{-i\theta}, \quad B = 1 + e^{i\theta} \tag{7.16}$$

从式(7.10)中亦有

$$\bar{V}(0,\theta) = 1, \quad \bar{V}^*(0,\theta) = 0, \quad \frac{d\bar{V}(\infty,\theta)}{d\xi} = 0, \quad \frac{d\bar{V}^*(\infty,\theta)}{d\xi} = 0 \tag{7.17}$$

在式(7.17)的边界条件下，式(7.15)的解答是

$$\bar{V} = C_1 e^{-\lambda_1\xi} + C_2 e^{-\lambda_2\xi}, \quad \bar{V}^* = C_3 e^{-\lambda_1\xi} + C_4 e^{-\lambda_2\xi} \tag{7.18}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1 = \sqrt{a + \sqrt{a^2 - c}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{a - \sqrt{a^2 - c}}, \quad a = 1 + \frac{1}{R}, \\ &c = \frac{1}{R}(1 - \cos\theta) \\ &C_1 = \frac{2 - \lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}, \quad C_2 = -\frac{2 - \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}, \quad C_3 = -\frac{(2 - \lambda_1^2)(2 - \lambda_2^2)}{D(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}, \quad C_4 = -C_3 \end{aligned}\right\} \tag{7.19}$$

将式(7.18)代入式(7.14)，并考虑到 $a, c, \lambda_1, \lambda_2, C_1, C_2$ 和 $C_3 D$ 是关于 $\theta$ 的偶函数，即可获得下列影响函数的结果

$$\left.\begin{aligned} V_m &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (C_1 e^{-\lambda_1\xi} + C_2 e^{-\lambda_2\xi})\cos m\theta d\theta \\ V_m^* &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} C_3 (e^{-\lambda_1\xi} - e^{-\lambda_2\xi}) \frac{\cos m\theta + \cos(m+1)\theta}{2(1+\cos\theta)} d\theta \end{aligned}\right\} \tag{7.20}$$

对上式微分，并设 $\xi = 0$，将结果代入式(7.8)和式(7.3)的第 1 个条件，可求得 $U_k(0)(0 \leqslant k \leqslant b_1 - 1)$ 和 $U_k^*(0)(0 \leqslant k \leqslant b_2 - 1)$ 的值。

将式(7.8)代入式(7.6)，可求得无量纲轴向荷载 $P_m$ 和 $P_m^*$。第 $m$ 组纤维的应力集中因子由下式定义

$$\left.\begin{aligned} P_m(0)/P_m(\infty) &= 1 + \sum_{k=0}^{b_1-1} \frac{dV_{m-k}(0)}{d\xi} U_k(0) + \sum_{k=0}^{b_2-1} \frac{dW_{m-k}(0)}{d\xi} U_k^*(0) \\ P_m^*(0)/P_m^*(\infty) &= 1 + \sum_{k=0}^{b_1-1} \frac{dV_{m-k}^*(0)}{d\xi} U_k(0) + \sum_{k=0}^{b_2-1} \frac{dW_{m-k}^*(0)}{d\xi} U_k^*(0) \end{aligned}\right\} \tag{7.21}$$

对于某根断纤维邻近的 HM 纤维或 LM 纤维，其应力集中因子可由 $m$ 的相应值代入式(7.21)来求得。例如，图 7.3(a)中的点 $B$ 和点 $A$ 处的应力集中因子分别为 $P^*_{b_1-1}(0)/P^*_{b_1-1}(\infty)$和 $P_{b_1}(0)/P_{b_1}(\infty)$。

Fukuda 和 Chou(1981，1983)曾经估计了式(7.21)，并提供了两种结果：①与非混杂的 Hedgepeth(1961)解答相比较；②混杂复合材料。首先考虑非混杂复合材料，由于在试样中仅有一种纤维，因此，$R=1$。下面给出两种极限情形。

(1) $b_1=1, b_2=0$

考虑图 7.3(a)情形，与断口(纤维)紧邻的纤维是指定为 $m=0$ 时的一根 LM 纤维。因此，其应力集中因子为

$$P_0^*(0)/P_0^*(\infty) = 1 + \frac{\mathrm{d}V_0^*}{\mathrm{d}\xi}U_0(0) = \frac{4}{3} \tag{7.22}$$

正如所期望的那样，这个结果和 Hedgepeth 结果完全一致。再考虑图 7.3(a)中 $b_1=0$ 和 $b_2=1$ 的情形，可以得出同样的结论。

(2) $b_1=b_2=1$

此种情形的应力集中因子是

$$P_1(0)/P_1(\infty) = 1 + \frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}\xi}U_0(0) + \frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}\xi}U_0^*(0) = \frac{4}{3}\times\frac{6}{5} \tag{7.23}$$

再考虑单向混杂复合材料单层板，这时 $R\neq 1$，解析地求解式(7.21)是困难的，因此需要对式(7.21)进行数值积分。图 7.4～图 7.6 给出了相应的计算结果。

图 7.4 给出了一根 LM 纤维断裂($b_1=1, b_2=0$)的极限情形。已断的 LM 纤维邻近的纤维是 $m=0$ 的 LM 纤维和 $m=1$ 的 HM 纤维，图 7.4 给出了这两根纤维的应力集中因子与拉伸刚度比[$R=E_f^*A_f^*/(E_fA_f)$]的关系。对于 $R=1$(即非混杂情形)，由式(7.22)给出 $K_{LM}=1.333$。另一方面，$R\to 0$ 的极限表明，LM 纤维的拉伸刚度为无限小，于是，图 7.4 再次成为仅含一种纤维的模型。在这个情形中，断口最邻近的纤维是 $m=1$ 的 HM 纤维，因此，当 $R\to 0$ 时，$K_{HM}\to 4/3$。

图 7.4 也表明，在混杂层板中，由于在已断的 HM 纤维和完整的 HM 纤维之

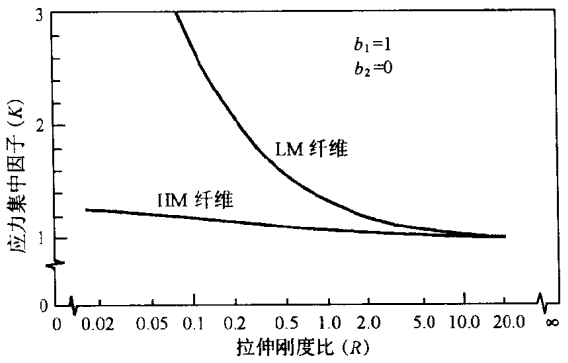



图 7.4　应力集中因子($K$)与拉伸刚度比($R$)的关系

间有一根完整的 LM 纤维，所以，完整的 HM 纤维的应力集中因子总比 4/3 小。例如，当 $R=0.5$ 时，$K_{LM}=1.67$，$K_{HM}=1.11$。

Fukuda 和 Chou(1983)还给出了如下结论：对于 $R<1$，断口最邻近的 HM 纤维(即图 7.3(b)，(c)中的位置 $C$，$E$)的应力集中因子分别小于断纤维数固定时，在图 7.3(b)中位置 $D$ 处的应力集中因子。这意味着在混杂复合材料中，只要涉及 HM 纤维，其应力集中就减小。

图 7.5 示出了 $R=1$ 时，应力集中因子与断纤维总数 $b_1+b_2$ 的关系，字母 $A\sim F$ 相应于图 7.3 中的位置 $A\sim F$。曲线 $D$ 和曲线 $E$ 表示断口最邻近纤维的应力集中因子，曲线 $C$ 和曲线 $F$ 则给出了断纤维次邻近的纤维应力集中因子。图 7.3 中的 $A$ 和 $B$ 情形给出的应力集中因子对断纤维数是不敏感的。

图 7.6 示出了 $R=1/3$ 时的应力集中因子，此种情形相应于碳/玻璃混杂复合材料。断口最邻近的 HM 纤维(即图 7.3(b)，(c)中的位置 $C$，$E$)的应力集中因子分别小于某一固定的断纤维数时，在图 7.3(b)中位置 $D$ 处的应力集中因子。这样，在混杂复合材料中的 HM 纤维就有可能比在单一 HM 纤维复合材料中承受较大的荷载，从而可以初步认识到**混杂效应**。

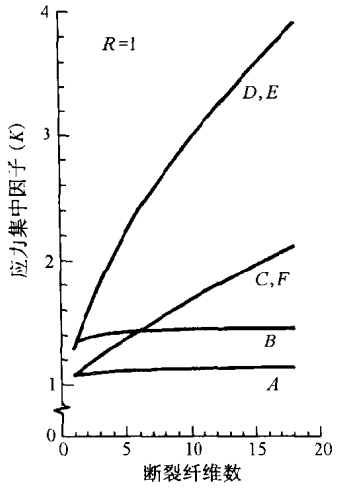



图 7.5 $R=1$ 时的应力集中因子与断裂纤维总数的关系

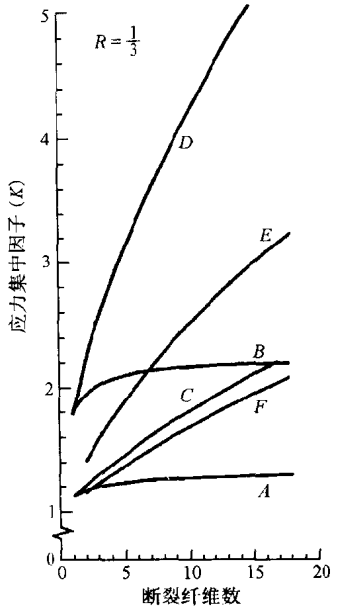



图 7.6 $R=1/3$ 时的应力集中因子与断裂纤维总数的关系

LM 纤维的应力集中因子在图 7.6 中用曲线 $D$ 和 $F$ 示出。图 7.5 和图 7.6 的曲线 $D$ 的比较表明，LM 纤维的应力集中随 $R$ 的减少而增加，这表明 LM 纤维在混杂复合材料中比在非混杂复合材料中更容易发生破坏。

当复合材料模型中的纤维数量很多时，控制方程的求解步骤变得异常复杂。Fukunaga、Chou 和 Fukuda(1984)采用特征矢量展开法求得了应力集中因子。表 7.1 和表 7.2 给出了他们对碳/玻璃混杂复合材料($R=E_f^* A_f^* /(E_f A_f)=1/3$)进行分析所求得的数值结果，表中的实心圆和空心圆分别表示 LE 纤维和 HE 纤维。表 7.1 给出了各种纤维相对体积分数时，由第 $i$ 和第 $j$ 根纤维的断裂所导致的第 $k$ 根纤维的应力集中因子 $K_{ij,k}$。在表 7.1 中给定的纤维排列进行重复而形成复合材料，但断裂纤维的位置是不重复的。在数值分析中，每一个复合材料模型均取 80 根纤维进行计算。

**表 7.1　各种 $V_{LE}$ 值时的应力集中因子(SCFs)**

| $V_{LE}$ / SCFs | 1.0 ●●●● 1 2 3 4 | 0.75 ●●●○ 1 2 3 4 | 0.5 ●○●○ 1 2 3 4 | 0.25 ○●○○ 1 2 3 4 |
|---|---|---|---|---|
| $K_{1,2}$ | 1.333 | 1.356 | 1.777 | 1.141 |
| $K_{1,3}$ | 1.067 | 1.077 | 1.121 | 1.036 |
| $K_{1,4}$ | 1.029 | 1.041 | 1.060 | 1.017 |
| $K_{2,1}$ | 1.333 | 1.347 | 1.131 | 1.829 |
| $K_{2,3}$ | 1.333 | 1.347 | 1.131 | 1.829 |
| $K_{2,4}$ | 1.067 | 1.102 | 1.030 | 1.208 |
| $K_{3,1}$ | 1.067 | 1.077 | 1.121 | 1.036 |
| $K_{3,2}$ | 1.333 | 1.356 | 1.777 | 1.141 |
| $K_{3,4}$ | 1.333 | 1.727 | 1.777 | 1.311 |
| $K_{4,1}$ | 1.029 | 1.077 | 1.010 | 1.017 |
| $K_{4,2}$ | 1.067 | 1.018 | 1.030 | 1.036 |
| $K_{4,3}$ | 1.333 | 1.128 | 1.131 | 1.318 |
| $K_{12,3}$ | 1.600 | 1.645 | 1.142 | 2.144 |
| $K_{12,4}$ | 1.143 | 1.221 | 1.135 | 1.304 |
| $K_{13,4}$ | 1.419 | 1.832 | 1.952 | 1.340 |
| $K_{13,2}$ | 1.802 | 1.772 | 2.767 | 1.291 |
| $K_{14,2}$ | 1.412 | 1.378 | 1.817 | 1.180 |
| $K_{14,3}$ | 1.412 | 1.210 | 1.261 | 1.359 |
| $K_{23,1}$ | 1.600 | 1.654 | 1.412 | 2.144 |
| $K_{23,4}$ | 1.600 | 2.275 | 2.038 | 1.913 |
| $K_{24,1}$ | 1.419 | 1.362 | 1.146 | 1.886 |
| $K_{24,3}$ | 1.802 | 1.494 | 1.270 | 2.252 |
| $K_{34,1}$ | 1.143 | 1.109 | 1.172 | 1.077 |
| $K_{34,2}$ | 1.600 | 1.478 | 2.038 | 1.258 |
| $K_{123,4}$ | 1.829 | 2.766 | 2.510 | 2.175 |
| $K_{234,1}$ | 1.829 | 1.768 | 1.522 | 2.382 |
| $K_{341,2}$ | 2.022 | 1.914 | 3.105 | 1.418 |
| $K_{412,3}$ | 2.022 | 1.822 | 1.569 | 2.612 |

表 7.2 给出了相对纤维体积分数 $V_{LE}=50\%$时，纤维束尺寸对应力集中的影响。除一根 LE 纤维与一根 HE 纤维相间排列之外(情形 1)，相同类型的 2(情形 2)，3(情形 3)和 4(情形 4)根纤维的左右毗连位置上，可以放置另一组其他类型的纤维。很明显，应力集中因子对细观纤维排列是敏感的。在各种混杂纤维排列中应力集中的知识，本质上是混杂复合材料强度的评价。

**表 7.2 各种束尺寸及 $V_{LE}=0.5$ 时的应力集中因子**

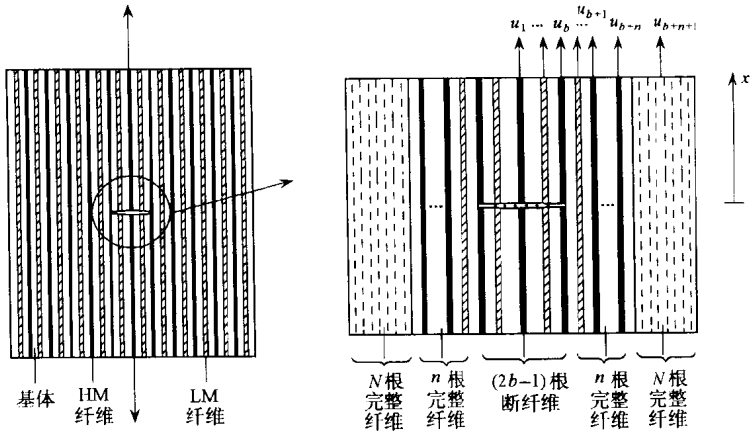
| | 1 2 3 4 | | | |
|---|---|---|---|---|
| 情形 1 | ○●○●\|○●○●\|○●○● | | | |
| 情形 2 | ●●○○\|●●○○\|●●○○ | | | |
| 情形 3 | ●○○○\|●●●○\|○○●● | | | |
| 情形 4 | ○○○●\|●●●○\|○○○● | | | |
| 纤维位置 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 情形 1 | 1.777 | × | 1.777 | 1.121 |
| 情形 2 | 1.376 | × | 1.762 | 1.175 |
| 情形 3 | 1.354 | × | 1.354 | 1.113 |
| | 1.108 | 1.366 | × | 1.763 |
| 情形 4 | 1.343 | × | 1.351 | 1.112 |
| | 1.079 | 1.365 | × | 1.764 |

### 7.2.2 修正的剪滞方法

从上述分析可见，Fukuda 和 Chou 实质上是将 Hedgepeth(1961)方法进行推广，并将其应用于层内混杂复合材料应力重新分布问题的研究中，故仍需采用影响函数和叠加法，这对研究纤维/基体界面破坏的影响是有困难的。为此，曾庆敦等(2001)提出了一种修正的剪滞分析模型，此模型不仅可以获得与 Fukuda 和 Chou 理论相当接近的结果，而且便于推广到计及基体及界面破坏的应力重新分布问题的研究中。

如图 7.7(a)所示的 HM 纤维和 LM 纤维交替相间均匀排列的二维层内混杂复合材料单层，假定试样在拉伸荷载下，某些 HM 纤维发生了断裂。现从层内混杂复合材料中对称地取出一个如图 7.7(b)所示的剪滞分析模型，根据剪滞理论，考虑纤维承受拉力，基体仅传递剪力。

此模型共含有$(2b-1+2n+2N)$根纤维。将这些纤维由里向外进行分组。第 1 组为 $b$ 根 HM 纤维(含有 $b_1=b$ 根已断裂的 HM 纤维)和$(b-1)$根 LM 纤维(含有 $b_2\leqslant b-1$ 根已断裂的 LM 纤维)，构成了**断裂区**。考虑对称性，断裂区中的纤维的轴




(a) 含断裂纤维的受拉伸的混杂复合材料　　(b) 修正的剪滞模型

图 7.7

向位移设为 $u_1, u_2, \cdots, u_b$。第 2 组为紧邻断裂区的以一根 LM 纤维开始的 $2n$ 根完整纤维，此区域称为**应力扰动区**，其位移用 $u_{b+1}, u_{b+2}, \cdots, u_{b+n}$ 表示。余下的 $2N$ 根纤维则为第 3 组(其中分别有 $2s_1, 2s_2$ 根 HM 纤维和 LM 纤维，且 $N=s_1+s_2$)。参照 Zweben 的假定，这组纤维和基体中的切应变忽略不计，各纤维位移均相同，构成了**均匀应变区**，其位移用 $u_{r+n+1}$ 表示。$n$ 和 $N$ 值视断裂区中的断裂纤维数而定，而确定了 $n$ 和 $N$ 值后自然可得 $s_1$ 和 $s_2$ 值。据此可列出第 1，2 及 3 组微段的剪滞平衡方程为

$$\left.\begin{aligned} &E_1A_1\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}x^2}+2G_mh(u_2-u_1)/d=0\\ &E_iA_i\frac{\mathrm{d}^2u_i}{\mathrm{d}x^2}+G_mh(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})/d=0,\quad i=2,3,\cdots,b+n\\ &(s_1E_fA_f+s_2E_f^*A_f^*)\frac{\mathrm{d}^2u_{b+n+1}}{\mathrm{d}x^2}+G_mh(u_{b+n}-u_{b+n+1})/d=0 \end{aligned}\right\} \tag{7.24}$$

注意，由于 HM 纤维和 LM 纤维交替排列，故当 $b$ 为奇数时，$E_1A_1=E_fA_f$，当 $b$ 为偶数时，$E_1A_1=E_f^*A_f^*$。在线弹性条件下，力与位移的关系为 $p_i(x)=E_iA_i(\mathrm{d}u_i/\mathrm{d}x)$。设 HM 纤维的远场拉力为 $p$，则剪滞模型的边界条件为

$$\left.\begin{aligned} &p_i(\infty)=p(\text{所有 HM 纤维}),\quad p_i(\infty)=[(E_f^*A_f^*/(E_fA_f)]p(\text{所有 LM 纤维})\\ &p_i(0)=0(\text{所有已断纤维}),\quad u_i(0)=0(\text{所有完整纤维}) \end{aligned}\right\} \tag{7.25}$$

为了便于求解方程，需引入下述无量纲量

$$\left.\begin{aligned} &p_i=p\cdot P_i,\quad E_iA_i/(E_fA_f)=R_i,\quad E_f^*A_f^*/(E_fA_f)=R\\ &u_i=p\sqrt{d/(E_fA_fG_mh)}U_i,\quad x=\sqrt{E_iA_fd/(G_mh)}\xi \end{aligned}\right\} \tag{7.26}$$

将式(7.26)代入式(7.24)中，可得无量纲的剪滞平衡方程

$$\left.\begin{aligned} &R_1\frac{\mathrm{d}^2U_1}{\mathrm{d}\xi^2}+2(U_2-U_1)=0\\ &R_i\frac{\mathrm{d}^2U_i}{\mathrm{d}\xi^2}+(U_{i+1}-2U_i+U_{i-1})=0,\quad i=2,3,\cdots,b+n\\ &(s_1+s_2R)\frac{\mathrm{d}^2U_{b+n+1}}{\mathrm{d}\xi^2}+(U_{b+n}-U_{b+n+1})=0 \end{aligned}\right\} \tag{7.27}$$

其中，当 $E_iA_i=E_f^*A_f^*$ 时，$R_i=R$；当 $E_iA_i=E_fA_f$ 时，$R_i=1$。将式(7.26)代入式(7.25)得无量纲的边界条件

$$\left.\begin{aligned} &P_i(\infty)=1(\text{所有 HM 纤维})\\ &P_i(\infty)=R(\text{所有 LM 纤维})\\ &P_i(0)=0(\text{所有已断纤维})\\ &U_i(0)=0(\text{所有完整纤维}) \end{aligned}\right\} \tag{7.28}$$

由边界条件式(7.28)中的第 1 和 2 式及方程式(7.27)，得 $U_i$ 的通解

$$U_i=\xi+\sum_{j=1}^{b+n+1}A_jB_{i,j}\exp(-\mu_j\xi) \tag{7.29}$$

式中，$A_j$ 为待定常数；$\mu_j^2$ 为矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的特征值，而矩阵 $\boldsymbol{T}$ 由式(7.27)得到

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} 2/R_1 & -2/R_1 & & \boldsymbol{0} & \\ & \ddots & & & \\ & -1/R_i & 2/R_i & -1/R_i & \\ & & & \ddots & \\ & \boldsymbol{0} & & -1/R_{b+n+1} & 1/R_{b+n+1} \end{bmatrix} \tag{7.30}$$

其中，$R_{b+n+1}=s_1+s_2R$，$B_{i,j}$ 为已知常数，由下式给出

$$\left.\begin{aligned} &B_{1,j}=1,\quad B_{2,j}=B_{1,j}(1-R_{1,j}\mu_j^2/2),\\ &B_{i,j}=B_{i-1,j}(2-R_{i-1,j}\mu_j^2)-B_{i-2,j}\\ &(j=1,2,\cdots,b+n+1;\qquad i=3,4,\cdots,b+n+1) \end{aligned}\right\} \tag{7.31}$$

由边界条件式(7.28)中的第 3 和 4 式及式(7.29)，有

$$\sum_{j=1}^{b+n+1}A_jB_{i,j}\mu_j=1(\text{所有已断纤维}),\ \sum_{j=1}^{b+n+1}A_jB_{i,j}=0(\text{所有完整纤维}) \tag{7.32}$$

由上式可求出待定常数 $A_j$，将 $A_j$ 代回式即得位移分布函数。在 $\xi=0$ 处的拉伸应力集中因子则由下式求得

$$K(i)=\left.\frac{\mathrm{d}U_i}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=0}=1-\sum_{j=1}^{b+n+1}A_jB_{i,j}\mu_j\quad(\text{所有完整纤维}) \tag{7.33}$$

对于任一给定的 HM 纤维断裂数 $b_1$ 和 LM 纤维断裂数 $b_2$，通过试算，可选取 $n$ 及 $N$ 值。现考虑如图 7.8 所示的两种纤维断裂情况。(a)$b_1=b$，$b_2=0$；(b)$b_1=b$，$b_2=b-1$。取 $R=1/3$，它接近于碳/玻璃纤维的刚度比。表 7.3 和表 7.4 给出了所

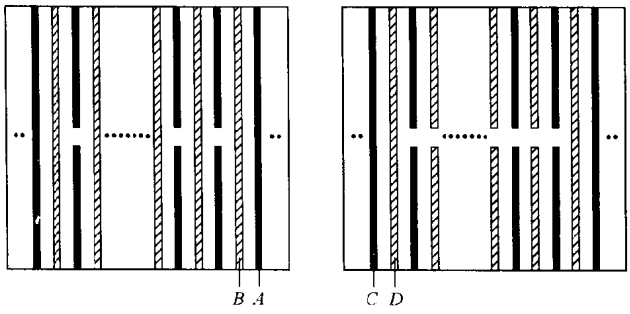



图 7.8　纤维断裂的两种模式

(a)$b_1=b, b_2=0$;(b)$b_1=b, b_2=b-1$

选取的最佳 $n$,$N$ 值及由此算得的应力集中因子。作为比较,表中亦列出了 Fukuda 和 Chou 理论的结果。从表中可见,对于(a)情况,取 $n=b+3$(至 4),$N=b+5$(至 6);对于(b)情况(当 $b=1$ 时,是特例,归于(a)情况),取 $n=b+5$(至 6),$N=b+8$(至 10),可以获得与 Fukuda 和 Chou 理论相当接近的结果。这种模型也适用于层内混杂复合材料的一般断裂形式,可推广到计及纤维/基体界面破坏的应力重分布问题的研究。

**表 7.3　修正的剪滞方法估计的纤维应力集中因子与 Fukuda 和 Chou 结果的比较**[情况(a)]

| 断裂纤维数 | | 碳 $b_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 玻璃 $b_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 完整纤维数 | | $n$ | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | | $N$ | 6 | 7 | 8 | 10 | 10 | 11 | 12 |
| 应力集中因子($K$) | $K_A$ | 修正的剪滞方法 | 1.121 9 | 1.171 4 | 1.199 0 | 1.216 0 | 1.228 2 | 1.236 0 | 1.239 7 |
| | | Fukuda 和 Chou 方法 | 1.121 | 1.172 | 1.199 | 1.216 | 1.228 | 1.236 | 1.240 |
| | $K_B$ | 修正的剪滞方法 | 1.779 8 | 1.954 4 | 2.032 2 | 2.0723 | 2.100 2 | 2.118 0 | 2.127 5 |
| | | Fukuda 和 Chou 方法 | 1.777 | 1.952 | 2.029 | 2.070 | 2.096 | 2.114 | 2.126 |

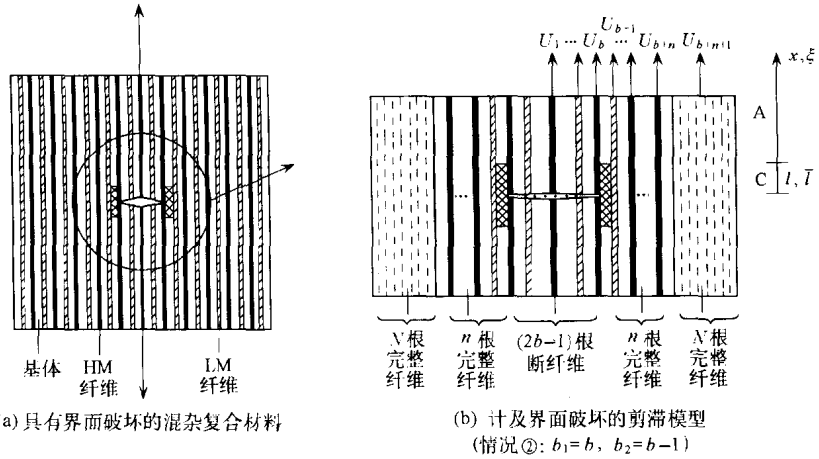
**表 7.4　修正的剪滞方法估计的纤维应力集中因子与 Fukuda 和 Chou 结果的比较**[情况(b)]

| 断裂纤维数 | | 碳 $b_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 玻璃 $b_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 完整纤维数 | | $n$ | 4 | 7 | 8 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| | | $N$ | 6 | 10 | 12 | 14 | 14 | 15 | 16 |
| 应力集中因子($K$) | $K_C$ | 修正的剪滞方法 | 1.121 9 | 1.291 9 | 1.447 7 | 1.592 7 | 1.729 9 | 1.857 3 | 1.971 1 |
| | | Fukuda 和 Chou 方法 | 1.121 | 1.291 | 1.448 | 1.593 | 1.728 | 1.852 | 1.968 |
| | $K_D$ | 修正的剪滞方法 | 1.779 8 | 2.515 4 | 3.078 3 | 3.554 7 | 3.984 4 | 4.373 1 | 4.718 3 |
| | | Fukuda 和 Chou 方法 | 1.777 | 2.511 | 3.075 | 3.550 | 3.970 | 4.348 | 4.696 |

### 7.2.3 纤维/基体界面破坏的影响

在层内混杂复合材料的拉伸破坏过程中，纤维的断裂可导致纤维/基体界面的破坏，从而直接影响断口邻近纤维的应力集中。关于层内混杂复合材料纤维/基体界面破坏对应力集中及强度的影响的定量研究，因涉及的因素较多，问题相当复杂，至今未见文章报道。曾庆敦等(2001)在图 7.7 所示模型的基础上，提出了一种计及纤维/基体界面损伤的修正的剪滞分析模型，着重研究了界面剪切强度对应力集中及界面损伤区长度的影响。

仍考虑如图 7.9(a)所示的 HM 纤维和 LM 纤维交替相间均匀排列的二维层内混杂复合材料单层，沿纤维方向受拉伸荷载作用。随着荷载的增加，某些纤维将发生逐步断裂。在此破坏过程中，断裂纤维和完整纤维之间的界面通常会发生剪切破坏，因为界面的强度相对较弱。图 7.9(b)为从复合材料中取出的含有$(2b-1)$根已断纤维及$(2n+2N)$根完整纤维的模型，图中也示出了断纤维和完整纤维之间的界面发生屈服破坏的情形。




(a) 具有界面破坏的混杂复合材料

(b) 计及界面破坏的剪滞模型
(情况②：$b_1=b$，$b_2=b-1$)

图 7.9

若用 $\tau_s$ 表示纤维/基体界面的剪切强度，则当作用在界面上的切应力达到或超过 $\tau_s$ 时，界面发生剪切屈服或脱粘，并可沿纵向扩展。界面损伤区长度可用 $2l$ 表示(上下对称)，见图 7.9(a)和图 7.10 所示。假定作用在此区域的界面切应力是常数且等于 $\eta\tau_s$，其中 $\eta(0\leqslant\eta\leqslant1)$ 为剪切参数(参见第 2 章)。由切应力的定义及式(7.26)，可以得到无量纲界面剪切强度 $\bar{\tau}_s$ 与 $\tau_s$ 的关系

$$\bar{\tau}_s = (\tau_s/p)\sqrt{E_f A_f dh/G_m} \tag{7.34}$$

下面仅研究两种典型的纤维断裂情况：①$b_1=b, b_2=0$；②$b_1=b, b_2=b-1$(当 $b=1$ 时，方程的求解归于情况①)。考虑断纤维与完整纤维之间的界面损伤，为区

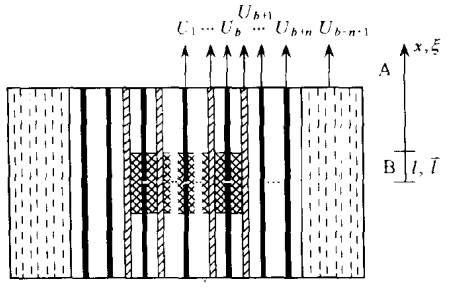



图 7.10　计及界面破坏的剪滞模型

(情况①：$b_1=b, b_2=0$)

分起见，将此模型再分为($\bar{l}\leqslant\xi\leqslant\infty$)的域 A 和($0\leqslant\xi\leqslant\bar{l}$)的域 B(对于情况①)及域 C(对于情况②)，其中 $\xi$ 和 $\bar{l}$ 分别为轴向坐标 $x$ 和界面损伤区长度 $l$ 的无量纲形式，其关系为

$$l=l/\sqrt{E_fA_fd/(G_mh)}\quad \xi=x/\sqrt{EAd/(Gh)} \tag{7.35}$$

图 7.9(a)或图 7.10 所示模型中的纤维仍按前述分组法分为 3 组，即将具有($2b-1$)根断纤维的中心断裂核、邻近 $2n$ 根完整纤维及远离断裂核的 $2N$ 根完整纤维分为 1～3 组，各组的无量纲位移和编号如图所示。

对于情况①和情况②，域 A($\bar{l}\leqslant\xi\leqslant\infty$)各组微段的无量纲剪滞平衡方程的表达式与式(7.27)完全相同，仅需将 $U$ 换成 $U^A$ 即可。对于情况①的域 B($0\leqslant\xi\leqslant\bar{l}$)，由图 7.10 可列出各组微段的无量纲剪滞平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}
&R_1\frac{d^2U_1^B}{d\xi^2}+2(-1)^b(\eta\bar{\tau}_s)=0\\
&R_i\frac{d^2U_i^B}{d\xi^2}+(-1)^{(b-i+1)}(\eta\bar{\tau}_s)-(-1)^{(b-i)}(\eta\bar{\tau}_s)=0,\\
&\qquad i=2,3,\cdots,b\\
&R_{b+1}\frac{d^2U_{r+1}^B}{d\xi^2}+(U_{b+2}^B-U_{b+1}^B)-(-\eta\bar{\tau}_s)=0\\
&R_i\frac{d^2U_i^B}{d\xi^2}+(U_{i+1}^B-2U_i^B+U_{i-1}^B)=0,\\
&\qquad i=b+2,b+3,\cdots,b+n\\
&(s_1+s_2R)\frac{d^2U_{b+n+1}^B}{d\xi^2}+(U_{b+n}^B-U_{b+n+1}^B)=0
\end{aligned}\right\} \tag{7.36}$$

由于界面剪切强度习惯上取正值，而($U_{完整}-U_{已断}$)恒等于负值，所以在上式中 $\eta\bar{\tau}_s$ 前面冠上了开关数$(-1)^b$，$(-1)^{(b-i+1)}$及$(-1)^{(b-i)}$。

对于情况②，由图 7.9(b)中的域 C($0\leqslant\xi\leqslant\bar{l}$)可列出各组微段的剪滞平衡方程为

$$
\left.\begin{aligned}
&R_1\frac{\mathrm{d}^2U_1^{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}\xi^2}+2(U_2^{\mathrm{C}}-U_1^{\mathrm{C}})=0\\
&R_i\frac{\mathrm{d}^2U_i^{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}\xi^2}+(U_{i+1}^{\mathrm{C}}-2U_i^{\mathrm{C}}+U_{i-1}^{\mathrm{C}})=0,\quad i=2,3,\cdots,b-1\\
&R_b\frac{\mathrm{d}^2U_b^{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}\xi^2}+(-\eta\bar{\tau}_{\mathrm{s}})-(U_b^{\mathrm{C}}-U_{b-1}^{\mathrm{C}})=0\\
&R_{b+1}\frac{\mathrm{d}^2U_{b+1}^{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}\xi^2}+(U_{b+2}^{\mathrm{C}}-U_{b+1}^{\mathrm{C}})-(-\eta\bar{\tau}_{\mathrm{s}})=0\\
&R_i\frac{\mathrm{d}^2U_i^{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}\xi^2}+(U_{i+1}^{\mathrm{C}}-2U_i^{\mathrm{C}}+U_{i-1}^{\mathrm{C}})=0,\quad i=b+2,b+3,\cdots,b+n\\
&(s_1+s_2R)\frac{\mathrm{d}^2U_{b+n+1}^{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}\xi^2}+(U_{b+n}^{\mathrm{C}}-U_{b+n+1}^{\mathrm{C}})=0
\end{aligned}\right\}
\tag{7.37}
$$

在 $\xi=\infty,\mathrm{d}U_i^{\mathrm{A}}/\mathrm{d}\xi=1(i=1,2,\cdots,b+n+1)$ 的条件下，由式(7.27)可求得 $U_i^{\mathrm{A}}$ 的解为

$$
U_i^{\mathrm{A}}=\xi+\sum_{j=1}^{b+n+1}A_jB_{i,j}\exp(-\mu_j\xi),\quad i=1,2,\cdots,b+n+1 \tag{7.38}
$$

式中，$A_j$ 为待定常数；$\mu_j^2(j=1,2,\cdots,b+n+1)$ 为矩阵 $\boldsymbol{T}_1$ 的特征值，而矩阵 $\boldsymbol{T}_1$ 由式(7.30)给出；$B_{i,j}$ 为已知常数，由下式给出

$$
\left.\begin{aligned}
&B_{1,j}=1\\
&B_{2,j}=B_{1,j}(1-R_{1,j}\mu_j^2/2)\\
&B_{i,j}=B_{i-1,j}(2-R_{i-1,j}\mu_j^2)-B_{i-2,j}\\
&(j=1,2,\cdots,b+n+1,\quad i=3,4,\cdots,b+n+1)
\end{aligned}\right\}
\tag{7.39}
$$

式(7.36)的通解为

$$
\left.\begin{aligned}
&U_i^{\mathrm{B}}=\frac{(-1)^{(b-1)}\eta\bar{\tau}_{\mathrm{s}}}{R_i}\xi^2+C_{2i-1}\xi+C_{2i},\quad i=1,2,\cdots,b\\
&U_i^{\mathrm{B}}=\bar{U}_i^{\mathrm{B}}+\sum_{j=2b+1}^{2b+2n}C_jD_{i,j}\exp(v_j\xi)+C_{2(b+n)+1}\xi+C_{2(b+n+1)},\\
&i=b+1,b+2,\cdots,b+n+1
\end{aligned}\right\}
\tag{7.40}
$$

式中，$v_j(j=2b+1,2b+2,\cdots,2b+2n)$ 为矩阵 $\boldsymbol{T}_2$ 的非零特征值的正负开平方根，其中

$$
\boldsymbol{T}_2=\begin{bmatrix}
1/R_{b+1} & -1/R_{b+1} & & & \mathbf{0}\\
 & \ddots & & & \\
 & -1/R_i & 2/R_i & -1/R_i & \\
 & & & \ddots & \\
 & \mathbf{0} & & -1/R_{b+n+1} & 1/R_{b+n+1}
\end{bmatrix};
\tag{7.41}
$$

$C_1 \sim C_{2(r+n+1)}$为未知常数；$D_{i,j}$为已知常数，由下式给出

$$\left.\begin{aligned} &D_{b+1,j} = 1, \\ &D_{b+2,j} = D_{b+1,j}(1 - R_{b+1,j}v_j^2) \\ &D_{i,j} = D_{i-1,j}(2 - R_{i-1,j}v_j^2) - D_{i-2,j} \\ &(j = 2b+1, 2b+2, \cdots, 2b+2n; \quad i = b+3, b+4, \cdots, b+n+1) \end{aligned}\right\}; \tag{7.42}$$

$\bar{U}_i^{\mathrm{B}}$为式(7.36)中后$(n+1)$个方程的任一组特解。式(7.37)的通解为

$$\left.\begin{aligned} U_i^{\mathrm{C}} &= \bar{U}_i^{\mathrm{C}} + \sum_{j=1}^{2(b-1)} M_j N_{i,j} \exp(\lambda_j \xi) + M_{2(b-1)+1}\xi + M_{2b}, \quad i = 1, 2, \cdots, b \\ U_i^{\mathrm{C}} &= \bar{U}_i^{\mathrm{C}} + \sum_{j=2b+1}^{2(b+n)} M_j N_{i,j} \exp(w_j \xi) + M_{2(b+n)+1}\xi + M_{2(b+n+1)}, \\ &\qquad i = b+1, b+2, \cdots, b+n+1 \end{aligned}\right\} \tag{7.43}$$

式中，$M_1 \sim M_{2(b+n+1)}$为未知常数；$\lambda_j (j=1,2,\cdots,2(b-1))$为矩阵$\boldsymbol{T}_3$的非零特征值的正负开平方根，其中

$$\boldsymbol{T}_3 = \begin{bmatrix} 2/R_1 & -2/R_1 & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & & \\ & -1/R_i & 2/R_i & -1/R_i \\ & & & \ddots \\ & \boldsymbol{0} & & -1/R_b \quad 1/R_b \end{bmatrix} \tag{7.44}$$

$w_j (j=2b-1, 2b+2, \cdots, 2(b+n))$为矩阵$\boldsymbol{T}_4$的非零特征值的正负开平方根，其中$\boldsymbol{T}_4$的表达式与$\boldsymbol{T}_2$完全相同；当$i=1,2,\cdots,b$；$j=1,2,\cdots,2(b-1)$时，$N_{i,j}$为已知常数，由下式给出

$$\left.\begin{aligned} &N_{1,j} = 1 \\ &N_{2,j} = N_{1,j}(1 - R_{1,j}\lambda_j^2/2) \\ &N_{i,j} = N_{i-1,j}(2 - R_{i-1,j}\lambda_j^2) - N_{i-2,j} \\ &(j = 1, 2, \cdots, 2(b-1); \quad i = 3, 4, \cdots, b) \end{aligned}\right\} \tag{7.45}$$

当$i=b+1, b+2, \cdots, b+n+1$；$j=2b+1, 2b+2, \cdots, 2(b+n)$时，$N_{i,j}$也为已知常数，表达式同式(7.42)，仅将式中的$D$换成$N$及$v$换成$w$即可。$\bar{U}_i^{\mathrm{C}} (i=1,2,\cdots,b)$为式(7.37)前$b$个方程的任一组特解，$\bar{U}_i^{\mathrm{C}} (i=b+1, b+2, \cdots, b+n+1)$为式(7.37)后$(n+1)$个方程的任一组特解。

对于情况①的断裂模式，待定常数为：$A_1 \sim A_{b+n+1}$，$C_1 \sim C_{2(b+n+1)}$及$\bar{l}$；对于情况②的断裂模式，待定常数则为：$A_1 \sim A_{b+n+1}$，$M_1 \sim M_{2(b+n+1)}$及$\bar{l}$。这两种情形的待定常数均分别有$3(b+n+1)+1$个，它们可由下述边界条件、连续条件及剪切条件求出：

1) 在 $\xi=0$ 处，断裂纤维的应变或应力为零，即

$dU_i^B(0)/d\xi=0$(情况①的断裂纤维)，$dU_i^C(0)/d\xi=0$(情况②的断裂纤维)；

2) 在 $\xi=0$ 处，完整纤维的位移为零，即

$U_i^B(0)=0$(情况①的完整纤维)，$U_i^C(0)=0$(情况②的完整纤维)；

3) 在 $\xi=\bar{l}$ 处，位移应该连续，即

$U_i^B(\bar{l})=U_i^A(\bar{l})$(情况①的所有纤维)，$U_i^C(l)=U_i^A(\bar{l})$(情况②的所有纤维)；

4) 在 $\xi=\bar{l}$ 处应变或应力应该连续，即

$$dU_i^B(\bar{l})/d\xi=dU_i^A(\bar{l})/d\xi\text{(情况①的所有纤维)},$$

$$dU_i^C(\bar{l})/d\xi=dU_i^A(\bar{l})/d\xi\text{(情况②的所有纤维)};$$

5) 在 $\xi=\bar{l}$ 处，对于两种断裂模式，作用在断裂纤维与完整纤维之间的界面上的切应力应该等于界面剪切强度。对于情况②有

$$U_{b+1}^A - U_b^A = -\bar{\tau}_s$$

可见，其对应有 $3(r+n+1)+1$ 个边界条件和连续条件，恰好可以完全确定其待定常数。而对于情况①，有 $b$ 个剪切条件，可令

$$\sum_{i=1}^{b}[U_{i+1}^A - U_i^A + (-1)^{(b-i)}(\eta\bar{\tau}_s)]^2 \to 0$$

这样也就可定出所有的待定常数。

在 $\xi=0$ 处的拉伸应力或应变集中因子可由下式求得

$$\left.\begin{aligned} K_b(i)&=\left.\frac{dU_i^B}{d\xi}\right|_{\xi=0}\text{(情况 ① 完整纤维)}\\ K_b(i)&=\left.\frac{dU_i^C}{d\xi}\right|_{\xi=0}\text{(情况 ② 完整纤维)}\end{aligned}\right\} \tag{7.46}$$

本计算结果，是先给定 $n$，$N$ 及 $\eta\bar{\tau}_s$ 求得的，$n$，$N$ 的取值具体见 7.2.2 内容。下面仅给出 $b=1,2,3$ 及 $\eta=1$ 时的计算结果。这里，对情况①，当 $b=1,2,3$ 时，有 $n=4,5,6$ 及 $N=6,7,8$；对于情况②，当 $b=1,2,3$ 时，有 $n=4,7,8$ 及 $N=6,10,12$。

图 7.11～图 7.13 示出了 $b=1,2,3$ 时情况①的纤维应力集中因子($K_b(i)$)、界面损伤区(无量纲)长度($\bar{l}_b$)与无量纲界面剪切强度($\bar{\tau}_s$)的关系。图中表明，$\bar{l}_b$ 随 $\bar{\tau}_s$ 的增加而减小，随 $b$ 的增加一般略微有所增加。除 $K_b(b+2)$ 外，$K_b(i)$ 均随 $\bar{\tau}_s$ 的增加而增加，增加的幅度随 $b$ 的增加而增大。$K_b(b+2)$ 随 $\bar{\tau}_s$ 的增加先增大后略微减小，大约在 $\bar{\tau}_s=0.2$ 左右出现峰值。在 $b$ 相同的情况下，具有界面损伤的纤维应力集中一般小于弹性情形下的应力集中，这表明，界面的损伤破坏确实能减小未断纤维的应力集中。

图 7.14 和图 7.15 示出了 $b=2,3$ 时情况②的纤维应力集中因子($K_b(i)$)、界面损伤区(无量纲)长度($\bar{l}_b$)与无量纲界面剪切强度($\bar{\tau}_s$)的关系。图中表明，$\bar{l}_b$ 也随 $\bar{\tau}_s$ 的增加而减小，随 $b$ 的增加显著增加。$K_b(b+1)$ 随 $\bar{\tau}_s$ 的增加而增加，$K_b(b+2)$ 也随 $\bar{\tau}_s$ 的增加先增大后略微减小，但出现峰值时的 $\bar{\tau}_s$ 值随 $b$ 的增加明显滞后。

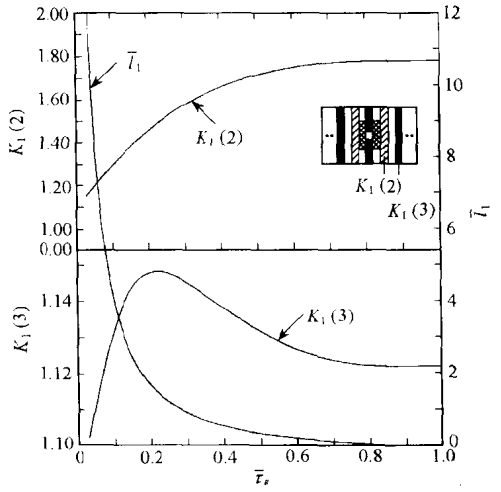



图 7.11　情况①或情况②中 $K_1(2)$，$K_1(3)$，$\bar{l}_1$ 与 $\bar{\tau}_s$ 的关系

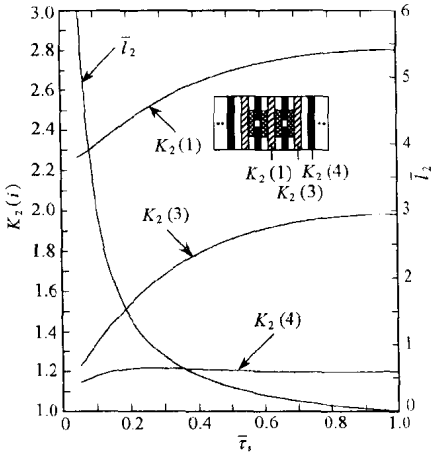



图 7.12　情况①中 $K_2(i)$ 和 $\bar{l}_2$ 与 $\bar{\tau}_s$ 的关系

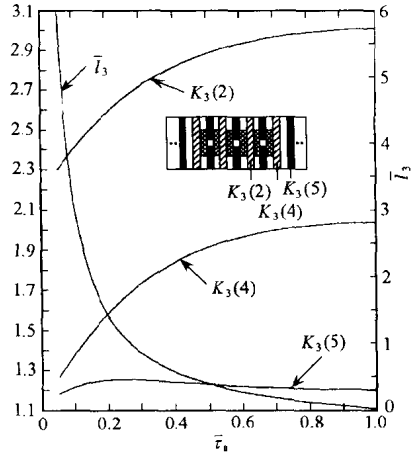



图 7.13　情况①中 $K_3(i)$，和 $\bar{l}_3$ 与 $\bar{\tau}_s$ 的关系

界面的剪切屈服(或脱粘)能有效地降低断裂纤维邻近纤维的应力集中，这对提高层内混杂复合材料的纵向拉伸强度似乎是有利的。事实上，混杂复合材料的拉伸强度与界面剪切强度是密切相关的，若界面剪切强度较低，应力集中虽然较小，但是界面损伤区的长度却相应增大，这样可导致断纤维在一个较大的区域内不能有效地承受应力，从而使纤维的增强效应减弱；若界面剪切强度太高，应力集中的增大又使得复合材料的承载能力降低。因此，只有当复合材料具有最佳的界面剪切强度时，才能获得最高的拉伸强度。这个问题涉及各种纤维、基体和界面性能的匹配。上述所给出的计算结果，为层内混杂复合材料细观统计断裂理论及微结构的优化设计提供了重要的理论依据。

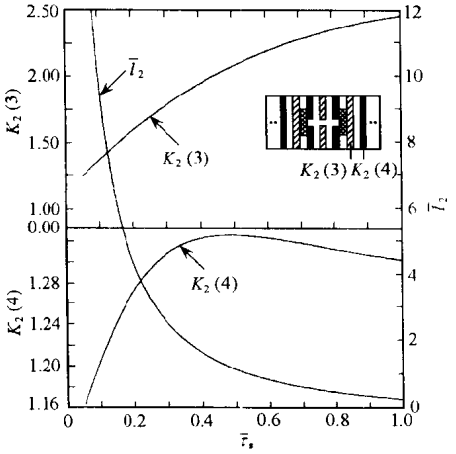



图 7.14　情况②中 $K_2(3)$，$K_2(4)$和 $\bar{l}_2$ 与 $\bar{\tau}_s$ 的关系

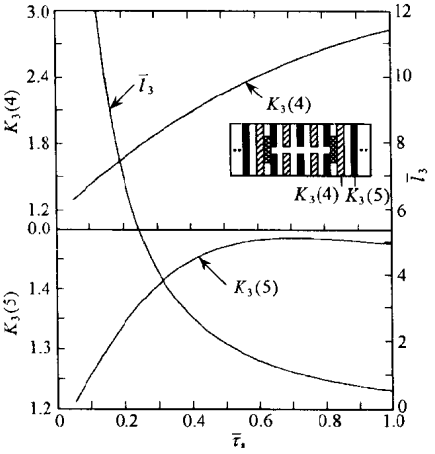



图 7.15　情况②中 $K_3(4)$，$K_3(5)$和 $\bar{l}_3$ 与 $\bar{\tau}_s$ 的关系

## 7.3　层间混杂叠层复合材料的应力集中

### 7.3.1　第一破坏的应力集中分析

图 7.16 所示为沿纤维方向受拉伸荷载作用的 3 层层间混杂叠层复合材料，仅考虑 LE 层中的部分纤维发生连续断裂。设高模量(HM)低延伸(LE)和低模量(LM)高延伸(HE)层之间传递切应力的纯树脂薄层的厚度为 $d_0$，各单层的厚度均为 $h$。由剪滞假定，可以列出第 $n$ 号 LE 纤维和 HE 纤维的剪滞平衡方程为

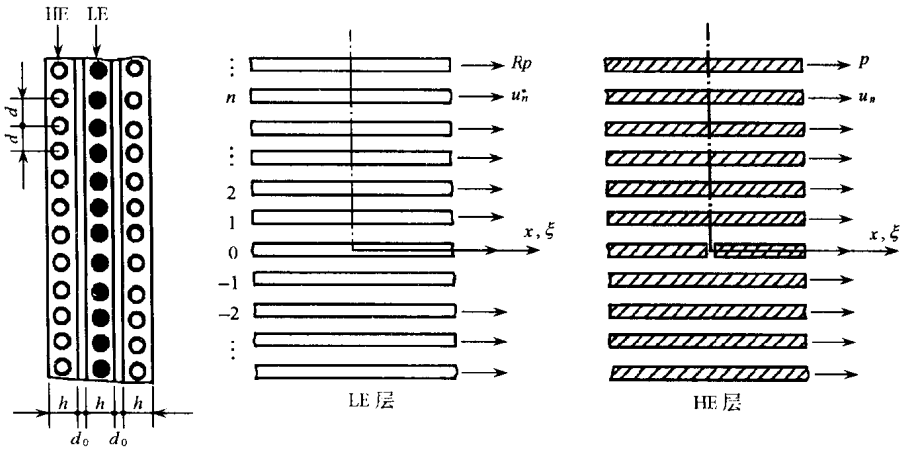



图 7.16　层间混杂叠层复合材料的应力集中分析模型

$$\left.\begin{aligned}
&E_f A_f \frac{d^2 u_n}{dx^2} - \frac{G_m h}{d}(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + \frac{2G_m d}{d_0}(u_n^* - u_n) = 0 \\
&E_f^* A_f^* \frac{d^2 u_n^*}{dx^2} + \frac{G_m h}{d}(u_{n+1}^* - 2u_n^* + u_{n-1}^*) \\
&\quad + \frac{G_m d}{d_0}(u_n - u_n^*) = 0
\end{aligned}\right\} \tag{7.47}$$

力与位移的关系为

$$p_n(x) = E_f A_f \frac{du_n(x)}{dx}, \quad p_n^*(x) = E_f^* A_f^* \frac{du_n^*(x)}{dx} \tag{7.48}$$

边界条件为

$$\left.\begin{aligned}
&p_n(0)=0(\text{断裂的 LE 纤维}), \quad u_n(0)=0(\text{完整的 LE 纤维}) \\
&u_n^*(0)=0(\text{完整的 HE 纤维}), \quad p_n(\infty)=p, p_n^*(\infty)=\frac{E_f^* A_f^*}{E_f A_f} p
\end{aligned}\right\} \tag{7.49}$$

引入下列无量纲参数：

$$\left.\begin{aligned}
&P_n = p_n/p, P_n^* = p_n^*/p \\
&U_n = \frac{u_n}{p}\sqrt{E_f A_f G_m h/d}, \quad U_n^* = \frac{u_n^*}{p}\sqrt{E_f A_f G_m h/d} \\
&\xi = \sqrt{G_m h/(E_f A_f d)}\, x, \quad R = E_f^* A_f^*/(E_f A_f), \\
&D = h/d, \quad D_0 = d/d_0
\end{aligned}\right\} \tag{7.50}$$

式(7.47)和式(7.48)可简化为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2 U_n}{dx^2} + D^2(U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}) + 2DD_0(U_n^* - U_n) = 0 \\
&R\frac{d^2 U_n^*}{dx^2} + D^2(U_{n+1}^* - 2U_n^* + U_{n-1}^*) + DD_0(U_n - U_n^*) = 0
\end{aligned}\right\} \tag{7.51}$$

$$P_n(\xi) = \frac{dU_n(\xi)}{d\xi}, \quad P_n^*(\xi) = R\frac{dU_n^*(\xi)}{d\xi} \tag{7.52}$$

无量纲边界条件为

$$\left.\begin{aligned}
&P_n(0) = 0(\text{断裂的 LE 纤维}), \quad U_n(0) = 0(\text{完整的 LE 纤维}) \\
&U_n^*(0) = 0(\text{完整的 HE 纤维}), \quad P_n(\infty) = 1, \quad P_n^*(\infty) = R
\end{aligned}\right\} \tag{7.53}$$

式(7.51)～(7.53)构成了剪滞分析的混合边值问题，可以采用 Hedgepeth 的影响函数和叠加法求解，并用梯形规则进行数值积分。若 LE 层中有 $j$ 根纤维发生相继断裂，则断口邻近的 LE 纤维所受到的应力集中便是

$$K_j = P_j(0) = \left.\frac{dU_n(\xi)}{d\xi}\right|_{\xi=0} \tag{7.54}$$

为了简化计算，假定 $D=D_0=1$。表 7.5 给出了 $R=1/3$(相当于玻璃/碳/玻璃叠层)及 $R=1$(相当于 3 玻璃/碳/3 玻璃叠层)的部分结果，表中还列出了单一纤维复合材料单层的 Hedgepeth 结果，以便比较。

表 7.5 应力集中因子

| 断裂纤维数目 $j$ | $K_j$ | | |
|---|---|---|---|
| | $R=1/3$ | $R=1$ | Hedgepeth 结果 |
| 1 | 1.176 | 1.154 | 1.333 |
| 2 | 1.251 | 1.205 | 1.600 |
| 3 | 1.290 | 1.225 | 1.829 |
| 4 | 1.314 | 1.236 | 2.031 |
| 5 | 1.330 | 1.242 | 2.216 |
| 6 | 1.342 | 1.246 | 2.387 |
| 7 | 1.351 | 1.249 | 2.546 |
| 8 | 1.359 | 1.251 | 2.696 |
| 9 | 1.364 | 1.253 | 2.836 |
| 10 | 1.369 | 1.254 | 2.973 |
| 11 | 1.372 | 1.255 | 3.102 |
| 12 | 1.375 | 1.256 | 3.266 |
| 24 | 1.392 | 1.261 | 4.453 |
| 36 | 1.398 | 1.263 | 5.409 |

从表中可见，在混杂叠层复合材料中，由 LE 纤维断裂引起的应力集中因子比 Hedgepeth 结果小，而且，随着 HE 层刚度的增加或层数的增加，应力集中因子将进一步减小，即 HE 层的约束效应增强。因此，混杂复合材料中的 LE 纤维可以承受较大的荷载，第一破坏(LE 分量的破坏)应变有所增加，即具有混杂效应。

### 7.3.2 最终破坏的应力集中分析

单向层间混杂叠层复合材料在纵向拉伸荷载作用下，LE 层将首先发生破坏。随后的进一步加载将伴随有其他的损伤、破坏模式出现，如层间界面破坏、HE 纤维的断裂等。下面将根据剪滞假定，首先介绍由曾庆敦等(1994)提出的修正的剪滞模型，讨论第一破坏发生后，在 HE 层中部分纤维断裂所导致的应力重新分布问题；然后，在下一小节中再讨论层间界面破坏的影响。

对图 7.17(a)所示的沿纤维方向受拉伸荷载作用的层间混杂叠层复合材料，假定中间的 LE 层或某些 HE 层已发生破坏，为了求解此种情形的应力重新分布，现从混杂叠层复合材料中取出如图 7.17(b)所示的剪滞分析模型。设各层的轴向位移用 $u_1, u_2, \cdots, u_m$ 表示，各单层厚度均为 $h$，各单层的纤维体积分数也相等。

单向层间混杂叠层复合材料的最终破坏通常起始于 HE 层中的部分纤维断裂，此种情形的细观应力重新分布可采用图 7.17(c)所示的第 $i$ HE 层作为简化剪滞模型进行分析。此模型中含有 $j$ 根已断纤维的断裂核。参照 Zweben 假定，认为

断裂核中的各根纤维的应力、位移分布均相同，可作为一个整体考虑。由于应力集中通常只在靠近断口处显著，稍远处即迅速削弱，故可认为在此层内，只在最邻近中央断裂核的左右各两根纤维承担其应力扰动，而同层的其他完整纤维则不受断裂核的影响，其应力仍符合各单层断裂所决定的分布规律。

设断裂核、邻近的两根纤维和其他纤维的位移分别为 $u_i^0, u_i^{\mathrm{I}}, u_i^{\mathrm{I}}, u_i$，其中 $u_i$ 为不受断裂核影响的第 $i$ 层(纤维)的位移(见图 7.17(c))。以图 7.17 所示 $m$HE/LE/$m$LE($m=1,2,\cdots$)层间混杂叠层复合材料为例建立剪滞平衡方程。考虑层间界面切应力的存在，列出第 $i$ HE 层中断裂核、邻近的两根纤维微段的剪滞平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}
&jE_{\mathrm{f}}^{*}A_{\mathrm{f}}^{*}\frac{\mathrm{d}^2u_i^0}{\mathrm{d}x^2}+2\frac{G_{\mathrm{m}}h}{d}(u_i^{\mathrm{I}}-u_i^0)-\frac{jG_{\mathrm{m}}d}{d_0}(u_i-u_{i-1})\\
&\quad+\frac{jG_{\mathrm{m}}d}{d_0}(u_{i+1}-u_i)=0\\
&E_{\mathrm{f}}^{*}A_{\mathrm{f}}^{*}\frac{\mathrm{d}^2u_i^{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}x^2}+\frac{G_{\mathrm{m}}h}{d}(u_i^{\mathrm{I}}-2u_i^{\mathrm{I}}+u_i^0)-\frac{G_{\mathrm{m}}d}{d_0}(u_i-u_{i-1})\\
&\quad+\frac{G_{\mathrm{m}}d}{d_0}(u_{i+1}-u_i)=0\\
&E_{\mathrm{f}}^{*}A_{\mathrm{f}}^{*}\frac{\mathrm{d}^2u_i^{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}x^2}+\frac{G_{\mathrm{m}}h}{d}(u_i-2u_i^{\mathrm{I}}-u_i^{\mathrm{I}})-\frac{G_{\mathrm{m}}d}{d_0}(u_i-u_{i-1})\\
&\quad+\frac{G_{\mathrm{m}}d}{d_0}(u_{i+1}-u_i)=0
\end{aligned}\right\}\qquad(7.55)$$

式中的第 3,4 项表示层间切应力的影响。对于外表面单层($i=m$)，应将第 4 项去掉。

式(7.55)中的 $u_i(i=1,2,\cdots,m)$ 可以从图 7.17(b)所示的分析模型中求出。根据剪滞假定，忽略基体承受的拉力，并考虑对称性，有

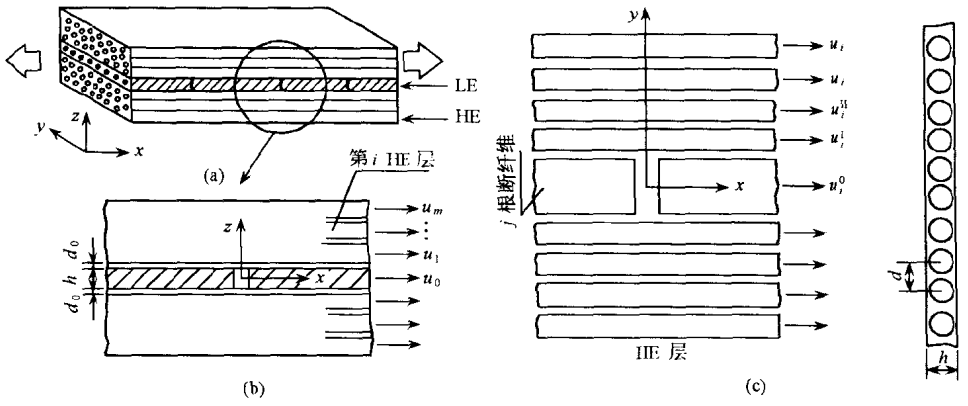



图 7.17

(a)在 LE 层中具有横向裂纹的层间混杂复合材料；(b)LE 层和/或某些 HE 层破坏的应力重新分布的剪滞分析模型；(c)第 $i$HE 层中部分纤维发生连续断裂的细观应力重新分布的修正剪滞分析模型

$$\left.\begin{aligned}
&E_f A_f N\frac{d^2u_0}{dx^2}+2\frac{G_m Nd}{d_0}(u_1-u_0)=0\\
&E_f^* A_f^* N\frac{d^2u_i}{dx^2}+\frac{G_m Nd}{d_0}(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})=0,\\
&\qquad i=1,2,\cdots,m-1\\
&E_f^* A_f^* N\frac{d^2u_m}{dx^2}+\frac{G_m Nd}{d_0}(u_{m-1}-u_m)=0
\end{aligned}\right\}\tag{7.56}$$

式中，$N$ 为任一单层的纤维总数。引入下列无量纲参数

$$\left.\begin{aligned}
&u_i^k=\sqrt{E_f A_f h/(G_m d)}U_i^k,\quad k=0,\mathrm{I},\mathrm{II};\quad i=1,2,\cdots,m\\
&u_i=\sqrt{E_f A_f h/(G_m d)}U_i,\quad i=0,1,2,\cdots,m\\
&x=\sqrt{E_f A_f h/(G_m d)}\xi,\quad E_f^* A_f^*/(E_f A_f)=R,h/d=D,d/d_0=D_0
\end{aligned}\right\}\tag{7.57}$$

式(7.55)可简化为

$$\left.\begin{aligned}
&jR\frac{d^2U_i^0}{d\xi^2}+2D^2(U_i^{\mathrm{I}}-U_i^0)-DD_0j(U_i-U_{i-1})\\
&\qquad+DD_0j(U_{i+1}-U_i)=0\\
&R\frac{d^2U_i^{\mathrm{I}}}{d\xi^2}+D^2(U_i^{\mathrm{II}}-2U_i^{\mathrm{I}}+U_i^0)-DD_0(U_i-U_{i-1})\\
&\qquad+DD_0(U_{i+1}-U_i)=0\\
&R\frac{d^2U_i^{\mathrm{II}}}{d\xi^2}+D^2(U_i-2U_i^{\mathrm{II}}+U_i^{\mathrm{I}})-DD_0(U_i-U_{i-1})\\
&\qquad+DD_0(U_{i+1}-U_i)=0
\end{aligned}\right\}\tag{7.58}$$

相应的边界条件为

$$\left.\frac{dU_i^0}{d\xi}\right|_{\xi=0}=0,\quad U_i^{\mathrm{I}}|_{\xi=0}=U_i^{\mathrm{II}}|_{\xi=0}=0,\quad \left.\frac{dU_i^k}{d\xi}\right|_{\xi=\infty}=1,\quad k=0,\mathrm{I},\mathrm{II}\tag{7.59}$$

式(7.56)简化为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2U_0}{d\xi^2}+2D_0(U_1-U_0)=0\\
&R\frac{d^2U_i}{d\xi^2}+D_0(U_{i+1}-2U_i+U_{i-1})=0,\quad i=1,2,\cdots,m-1\\
&R\frac{d^2U_m}{dx^2}+D_0(U_{m-1}-U_m)=0
\end{aligned}\right\}\tag{7.60}$$

相应的边界条件为

$$\left.\frac{dU_i}{d\xi}\right|_{\xi=0}=0(\text{断裂层}),\quad U_i|_{\xi=0}=0(\text{完整层}),\quad \left.\frac{dU_i}{d\xi}\right|_{\xi=\infty}=1(\text{所有层})\tag{7.61}$$

从式(7.60)和式(7.61)中，可以求得 $U_i(\xi)(i=0,1,2,\cdots,m)$，将其代入式(7.58)并与式(7.59)一起，即可求得 $U_i^k(\xi)(k=0,\mathrm{I},\mathrm{II})$。

以 $R=1/3$ 的碳/玻璃纤维混杂叠层复合材料为例，计算中取 $D=D_0=1$。设 $K_{i,0}$表示当 0 到 $i-1$ 层破坏后第 $i$ 层纤维的应力集中因子；$K_{i,0}$表示当 0 到 $i-1$ 层发生破坏，并且第 $i$ 层有 $j$ 根纤维已断形成断裂核时，第 $i$ 层中最邻近该断裂核的纤维在 $\xi=0$ 处的应力集中因子。它们分别由下式求得

$$K_{i,0}=\left.\frac{\mathrm{d}U_i(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=0},\quad K_{i,j}=\left.\frac{\mathrm{d}U_i^j(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=0}\quad i\neq 0;\quad j=1,2,\cdots \tag{7.62}$$

以 GRP/CFRP/GRP 和 3GRP/CFRP/3GRP 为例进行计算，所得结果示于表 7.6 中。

**表 7.6　$R=1/3$ 时的层间混杂复合材料的应力集中因子**

| $i$ \ $j$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3GRP/CFRP/3GRP | | | | | | |
| 1 | 1.969 9 | 2.591 2 | 3.058 4 | 3.469 2 | 3.827 3 | 4.162 6 |
| 2 | 2.867 6 | 3.776 6 | 4.459 0 | 5.001 6 | 5.579 9 | 6.068 5 |
| 3 | 4.500 0 | 5.926 4 | 6.997 3 | 7.847 9 | 8.756 3 | 9.523 6 |
| GRP/CFRP/GRP | | | | | | |
| 1 | 2.500 0 | 3.292 4 | 3.887 4 | 4.359 9 | 4.864 6 | 5.290 9 |

### 7.3.3　层间界面破坏对最终破坏的影响

下面将介绍由曾庆敦等(1999)提出的修正的剪滞模型，讨论层间混杂叠层复合材料层间界面破坏对最终破坏过程中的细观应力重新分布的影响，给出 HE 纤维的应力集中因子和脱层长度与界面剪切强度的定量关系。

仍考虑图 7.18(a)所示的沿纤维方向受拉伸荷载作用的层间混杂叠层复合材料，假定中间的 LE 层已存在中央穿透裂纹，并与第 1HE 层之间有关于其中央裂纹为对称的长为 $2l$ 的层间界面破坏。虽然断纤维与完整纤维之间的基体或界面可能发生破坏，HE 各层之间的界面也可能发生破坏，但情况相当复杂，在此不予考虑。

以图 7.18 所示 $m$HE/LE/$m$LE($m=1,2,\cdots$)层间混杂叠层复合材料为例建立剪滞平衡方程。考虑第 0 层 LE 层和第 1 层(HE 层，$i=1$)之间存在层间界面破坏区，假定作用在此破坏区内的无量纲切应力是常数且等于 $\eta\bar{\tau}_s$。采用无量纲项，当 $i-1$ 时，由图 7.18(c)建立的剪滞平衡方程为

B 区($0\leqslant\xi\leqslant\bar{l}$)：

$$\left.\begin{aligned}
&jR\frac{\mathrm{d}^2U_1^{0\mathrm{B}}}{\mathrm{d}\xi^2}+2D^2(U_1^{1\mathrm{B}}-U_1^{0\mathrm{B}})+DD_0j(U_2^{\mathrm{B}}-U_1^{\mathrm{B}})+DD_0j\eta\bar{\tau}_s=0\\
&R\frac{\mathrm{d}^2U_1^{1\mathrm{B}}}{\mathrm{d}\xi^2}+D^2(U_1^{\mathrm{I}\,1\mathrm{B}}-2U_1^{1\mathrm{B}}+U_1^{0\mathrm{B}})+DD_0(U_2^{\mathrm{B}}-U_1^{\mathrm{B}})+DD_0\eta\bar{\tau}_s=0\\
&R\frac{\mathrm{d}^2U_1^{\mathrm{I}\,1\mathrm{B}}}{\mathrm{d}\xi^2}+D^2(U_1^{\mathrm{B}}-2U_1^{\mathrm{I}\,1\mathrm{B}}+U_1^{1\mathrm{B}})+DD_0(U_2^{\mathrm{B}}-U_1^{\mathrm{B}})+DD_0\eta\bar{\tau}_s=0
\end{aligned}\right\} \tag{7.63}$$

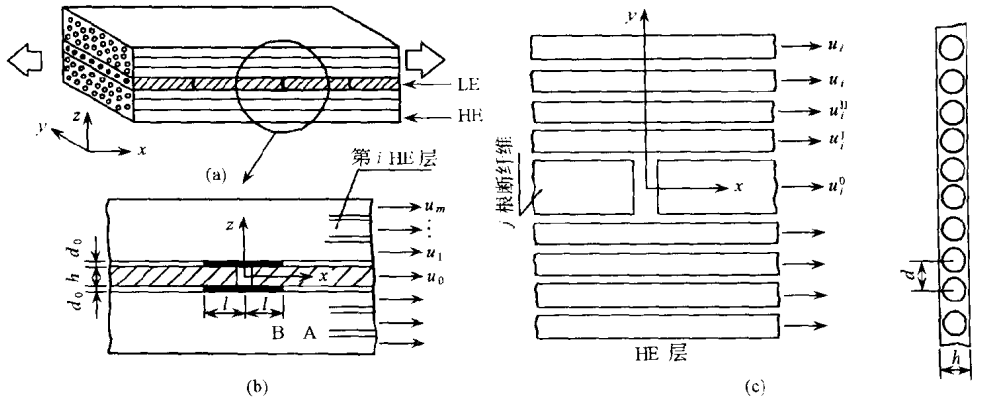



图 7.18

(a)LE 层中具有横向裂纹和层间界面发生破坏的层间混杂复合材料；(b)LE 层的断裂和层间界面破坏的应力重新分布的剪滞分析模型；(c)第 $i$ HE 层中部分纤维发生连续断裂的细观应力重新分布的修正剪滞分析模型

当 $i=2,3,\cdots,m-1$ 时，因不考虑 HE 各层的层间界面破坏，故 B 区($0\leqslant\xi\leqslant\bar{l}$)和 A 区($\bar{l}\leqslant\xi\leqslant\infty$)的无量纲剪滞平衡方程与式(7.58)完全相同，仅将式中的位移符号分别加上上角标 B 和 A 即可。当 $i=m$ 时，应将式(7.58)中的第 4 项去掉。

为求解上述方程，需引进下列无量纲边界条件和连续条件

$$\left.\begin{aligned}&\left.\frac{\mathrm{d}U_i^{0\mathrm{B}}(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=0}=0\\&U_i^{\mathrm{I}\,\mathrm{B}}(0)=U_i^{\mathrm{II}\,\mathrm{B}}(0)=0\\&\left.\frac{\mathrm{d}U_i^{k\mathrm{A}}(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=\infty}=1\ (k=0,\mathrm{I},\mathrm{II};\quad i=1,2,\cdots,m)\end{aligned}\right\}\tag{7.64}$$

$$\left.\begin{aligned}&\left.\frac{\mathrm{d}U_i^{k\mathrm{B}}(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=\bar{l}}=\left.\frac{\mathrm{d}U_i^{k\mathrm{A}}(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=\bar{l}}\\&U_i^{k\mathrm{B}}(\bar{l})=U_i^{k\mathrm{A}}(\bar{l})\ (k=0,\mathrm{I},\mathrm{II};\quad i=1,2,\cdots,m)\end{aligned}\right\}\tag{7.65}$$

无量纲剪滞平衡方程中还含有 $U_i^{\mathrm{B}}$ 和 $U_i^{\mathrm{A}}$，它们可由图 7.18(b)所示的剪滞分析模型求得。考虑对称性和采用无量纲项，列出的平衡方程是

B 区($0\leqslant\xi\leqslant\bar{l}$)：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2U_0^{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}\xi^2}-2D_0\eta\bar{\tau}_s=0\\&\frac{\mathrm{d}^2U_1^{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}\xi^2}+D_0(U_2^{\mathrm{B}}-U_1^{\mathrm{B}})+D_0\eta\bar{\tau}=0\\&R\frac{\mathrm{d}^2U_i^{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}\xi^2}+D_0(U_{i+1}^{\mathrm{B}}-2U_i^{\mathrm{B}}+U_{i-1}^{\mathrm{B}})=0,\quad i=2,\cdots,m-1\\&R\frac{\mathrm{d}^2U_m^{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}x^2}+D_0(U_{m-1}^{\mathrm{B}}-U_m^{\mathrm{B}})=0\end{aligned}\right\}\tag{7.66}$$

A 区($\bar{l}\leqslant\xi\leqslant\infty$)为弹性情形，其剪滞平衡方程即为式(7.60)，仅将式中的位移符号加上上角标 A 即可。由下列的边界条件、连续条件和剪切条件可求解式(7.60)和式(7.66)中的位移分布函数

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\frac{\mathrm{d}U_i^{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=0}=0(\text{断裂层}),\quad U_i^{\mathrm{B}}|_{\xi=0}=0(\text{完整层}),\\
&\left.\frac{\mathrm{d}U_i^{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=\infty}=1(\text{所有层})\\
&\left.\frac{\mathrm{d}U_i^{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=\bar{l}}=\left.\frac{\mathrm{d}U_i^{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=\bar{l}},\quad U_i^{\mathrm{B}}(\bar{l})=U_i^{\mathrm{A}}(\bar{l}),\quad i=0,1,2,\cdots,m\\
&\bar{\tau}_{\mathrm{s}}=U_0^{\mathrm{A}}(\bar{l})-U_1^{\mathrm{A}}(\bar{l})
\end{aligned}\right\}\tag{7.67}$$

由式(7.60)，式(7.66)及式(7.67)可求得 $U_i^{\mathrm{B}}$，$U_i^{\mathrm{A}}$ 及无量纲脱层长度($\bar{l}$)，再由式(7.58)，式(7.63)及式(7.64)可求得 $U_i^{k\mathrm{B}}$($k=0$，Ⅰ，Ⅱ)。上述问题的求解十分繁难。在求解过程中，为了简化运算，假定 $D=D_0=1$，$\eta=1$。

以 $R=1/3$ 的碳/玻璃纤维混杂叠层复合材料为例进行计算，相应的应力集中因子由下式求得

$$K_{i,0}=\left.\frac{\mathrm{d}U_i^{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\right|_{\xi=0},\quad K_{i,j}=\left.\frac{\mathrm{d}U_i^{1\mathrm{B}}(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=0},\quad i\neq 0;\qquad j=1,2,\cdots$$

对于 3GRP/CFRP/3GRP 和 4GRP/CFRP/4GRP 叠层板，$K_{1,j}$ 与无量纲层间界面剪切强度 $\bar{\tau}_{\mathrm{s}}$ 及断纤维数 $j$($j=0,1,2,\cdots$)的关系示于图 7.19 和图 7.20 中。从图中可以看出，混杂复合材料中的 $K_{1,j}$ 随无量纲界面剪切强度($\bar{\tau}_{\mathrm{s}}$)的增加而逐渐增大，随着 HE 层中的断裂纤维数目的增加，其紧邻的 HE 纤维的应力集中因子也增加。前面给出的弹性情形中的应力集中的计算结果，其值均大于计及层间界面破坏影响的结果。可见，层间界面的剪切破坏，确实能降低 HE 纤维的应力集中，这对提高混杂复合材料的最终拉伸强度似乎是有利的。然而，若界面剪切强度太低，层间界面的破坏则将成为控制因素，对材料的承载能力同样有严重的影响。因此，仅

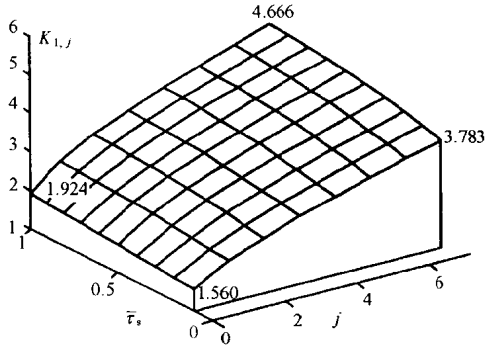



图 7.19　3GRP/CFRP/3GRP 的 $K_{1,j}$ 与 $\bar{\tau}_{\mathrm{s}}$ 和 $j$ 的关系

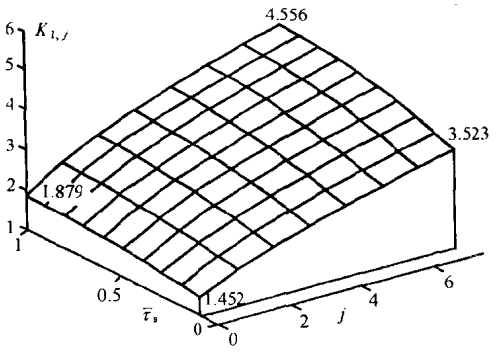



图 7.20　4GRP/CFRP/4GRP 的 $K_{1,j}$ 与 $\bar{\tau}_s$ 和 $j$ 的关系

当层间界面剪切强度达到某一合适的数值时，层间混杂复合材料才具有最高的最终拉伸强度。这个问题将在统计分析中进行阐述。

图 7.21 示出了无量纲层间界面破坏区长度(或脱层长度)($\bar{l}$)与无量纲界面剪切强度($\bar{\tau}_s$)的关系。结果表明，脱层长度随界面剪切强度的增加而减小，与应力集中的变化趋势正好相反，这与实际情况相符。在条件相同的情况下，3GRP/CFRP/3GRP 的应力集中及脱层长度比 4GRP/CFRP/4GRP 的略大，而脱层长度的变化趋势则符合实验观察。

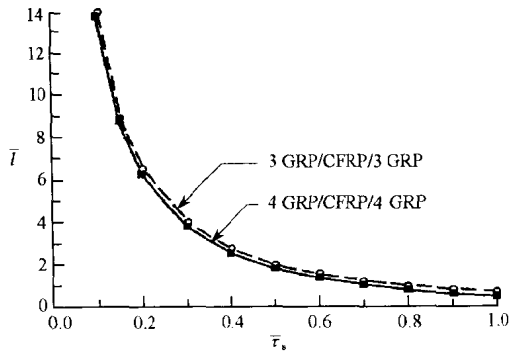



图 7.21　无量纲层间界面破坏区长度随无量纲界面剪切强度的变化趋势

### 7.3.4　动应力集中

Ji、Hsiao 和 Chou(1981)对层间混杂叠层复合材料中由纤维断裂引起的**动应力集中**问题进行了研究。图 7.22 示出了 HM/LM 混杂叠层复合材料及分析模型。与位置 $x$ 和时间 $t$ 有关的 HM 纤维和 LM 纤维的位移场分别用 $u_n(x,t)$ 和 $u_n^*(x,t)$ 表示，相应的纤维轴向力则用 $p_n(x,t)$ 和 $p_n^*(x,t)$ 表示。下面仅分析当 $n=0$ 号 HM 纤维突然发生断裂时，其邻近的 $n=1$ 或 $n=-1$ 号 HM 纤维的动应力集中因子。

控制 HM 纤维和 LM 纤维变形的基本方程近似为

$$\left.\begin{aligned} &E_{\mathrm{f}}A_{\mathrm{f}}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}+\frac{G_{\mathrm{m}}h}{d}(u_{n+1}-2u_n+u_{n-1})\\ &\quad+\frac{G_{\mathrm{m}}d}{d_0}(u_n^*-u_n)=m\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}\\ &E_{\mathrm{f}}^*A_{\mathrm{f}}^*\frac{\partial^2 u_n^*}{\partial x^2}+\frac{G_{\mathrm{m}}h}{d}(u_{n+1}^*-2u_n^*+u_{n-1}^*)\\ &\quad+\frac{G_{\mathrm{m}}d}{d_0}(u_n-u_n^*)=m^*\frac{\partial^2 u_n^*}{\partial t^2} \end{aligned}\right\} \tag{7.68}$$

上式对所有的 $n(n=-\infty,\cdots,-1,0,1,\cdots,\infty)$均成立。在式(7.68)中，$m$ 和 $m^*$分别为 HM 纤维和 LM 纤维每单位面积的质量。

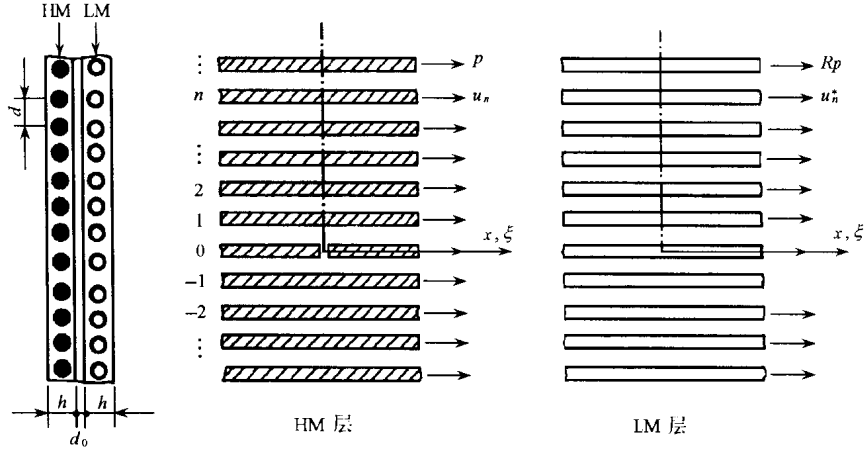



图 7.22　层间混杂叠层复合材料的动应力集中分析模型

边界条件为

$$\left.\begin{aligned} &p_0(0,t)=0,\quad u_n(0,t)=0(n\neq 0),\quad p_n(\pm\infty,t)=p(\text{所有 } n)\\ &u_n^*(0,t)=0(\text{所有 } n),\quad p_n^*(\pm\infty,t)=Rp(\text{所有 } n) \end{aligned}\right\} \tag{7.69}$$

初始条件为

$$\left.\begin{aligned} &p_n(x,0)=p,\left.\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0\\ &p_n^*(x,0)=Rp,\left.\frac{\partial u_n^*(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \end{aligned}\right\} \tag{7.70}$$

上式对所有 $n$ 均成立。纤维和位移的关系为

$$p_n=E_{\mathrm{f}}A_{\mathrm{f}}\frac{\partial u_n}{\partial x},\quad p_n^*=E_{\mathrm{f}}^*A_{\mathrm{f}}^*\frac{\partial u_n^*}{\partial x} \tag{7.71}$$

通过引进下列的无量纲参数：

$$
\left.\begin{aligned}
&P_n=\frac{p_n}{p},\quad P_n^*=\frac{p_n^*}{p}\\
&U_n=\frac{u_n}{p}\sqrt{\frac{E_fA_fG_mh}{d}},\quad U_n^*=\frac{u_n^*}{p}\sqrt{\frac{E_fA_fG_mh}{d}}\\
&\xi=x\sqrt{\frac{G_mh}{E_fA_fd}},\quad \tau=t\sqrt{\frac{G_mh}{md}}\\
&R=\frac{E_f^*A_f^*}{E_fA_f},\quad M=\frac{m^*}{m},\quad D=\frac{h}{d},\quad D_0=\frac{d}{d_0}
\end{aligned}\right\}\tag{7.72}
$$

式(7.68)可以重新写成

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2U_n}{\partial\xi^2}+D^2(U_{n+1}-2U_n+U_{n-1})+DD_0(U_n^*-U_n)=\frac{\partial^2U_n}{\partial\tau^2}\\
&R\frac{\partial^2U_n^*}{\partial\xi^2}+D^2(U_{n+1}^*-2U_n^*+U_{n-1}^*)+DD_0(U_n-U_n^*)=M\frac{\partial^2U_n^*}{\partial\tau^2}
\end{aligned}\right\}\tag{7.73}
$$

同样,式(7.69)成为

$$
\left.\begin{aligned}
&P_0(0,\tau)=0,\quad U_n(0,\tau)=0(n\neq0),\quad P_n(\pm\infty,\tau)=1(\text{所有 }n)\\
&U_n^*(0,\tau)=0(\text{所有 }n),\quad P_n^*(\pm\infty,\tau)=R(\text{所有 }n)
\end{aligned}\right\}\tag{7.74}
$$

式(7.70)按照位移可以写成为

$$
\left.\begin{aligned}
&U_n(\xi,0)=\xi,\quad \left.\frac{\partial U_n(\xi,\tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=0\\
&U_n^*(\xi,0)=\xi,\quad \left.\frac{\partial U_n^*(\xi,\tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=0
\end{aligned}\right\}\tag{7.75}
$$

式(7.73)～(7.75)可以遵循 Hedgepeth(1961)方法进行求解。求解过程主要涉及 3 个基本步骤:按照时间进行拉普拉斯变换、影响函数技术的应用及未知函数的傅里叶级数表示。Ji 等计算了断纤维邻近的 HM 纤维的动应力集中因子,最大的应力集中因子 $K_1(0,\tau)$发生在 $\xi=0$ 处。值得注意的是,$K_1(0,\tau)$的解答由与 HM 纤维和 LM 纤维有关的两部分组成。图 7.23～图 7.25 分别示出了 $m^*/m=1,2,6$ 时,应力集中因子 $K_1(0,\tau)$随无量纲时间($\tau$)的变化趋势。解答的两个分量用 $K_1'$ 和 $K_1''$ 表示,而在这些图中,均取 $D=D_0=1$。图 7.23 为非混杂复合材料的情形,作为比较,图中也示出了单一纤维复合材料单层板的 Hedgepeth 解答。$K_1'$ 和 $K_1''$ 相加给出了总的应力集中因子。当 HM 纤维和 LM 纤维质量密度差别增加时,$K_1'$ 和 $K_1''$ 峰值的位置是**异相**的,因此,$K_1'+K_1''$ 的最大值减小(图 7.24 和图 7.25)。

Ji 等推断出:在具有不同质量密度的纤维的混杂复合材料中,与两种组分纤维材料有关的应力集中因子的时间变化总是异相的。母体 HM 纤维复合材料总是为混杂复合材料的应力集中提供上界,因为这是在 $K_1'$ 和 $K_1''$ 值的相位和大小方面无差别的情形。此外,$K_1'$ 和 $K_1''$ 的大小是由组分纤维的拉伸刚度所确定的。

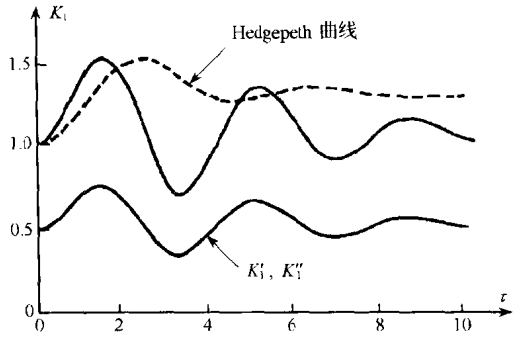



图 7.23　$M=R=D=D_0=1$ 时的应力集中因子($K_1$)随无量纲时间($\tau$)的变化趋势

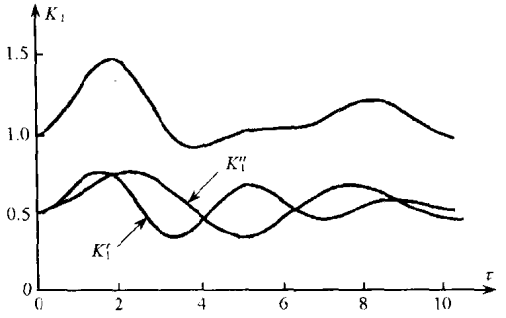



图 7.24　$M=2, R=D=D_0=1$ 时的应力集中因子($K_1$)随无量纲时间($\tau$)的变化趋势

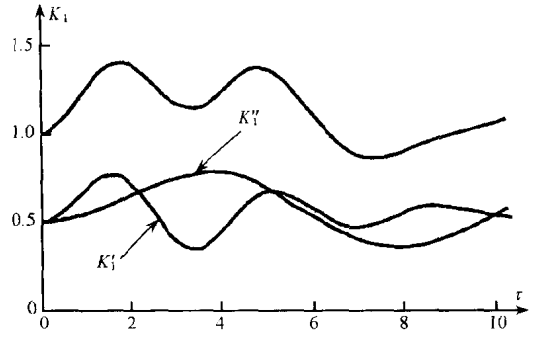



图 7.25　$M=6, R=D=D_0=1$ 时的应力集中因子($K_1$)随无量纲时间($\tau$)的变化趋势

## 7.4　拉伸应力应变行为

图 7.26 示出了含有 HE 纤维和 LE 纤维的混杂复合材料的理想的应力-应变曲线(Aveston and Kelly　1980)。对于组分相之间具有良好粘结的混杂复合材料，其应力-应变曲线由 $OABC$ 给出。这条曲线的重要特征包括：由 $OA$ 表示的弹性行为、第一破坏应变 $\varepsilon_{Lu}$、曲线 $AB$ 的较平坦部分、曲线在较小斜率($BC$)处随后的上

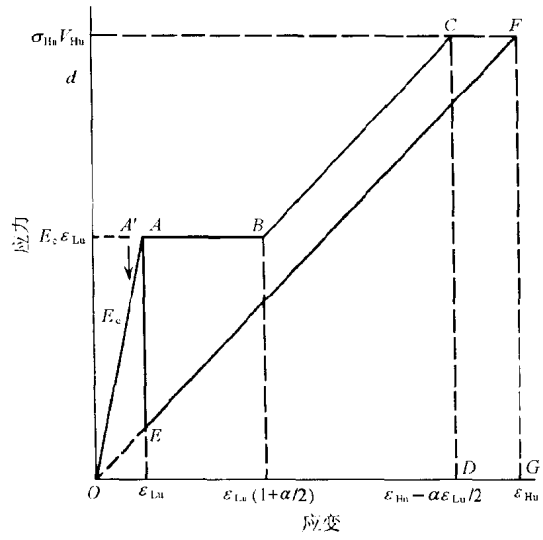



图 7.26　混杂复合材料的一种典型应力-应变曲线

升及由点 $D$ 给出的最终破坏应变。下标 H 和 L 分别用来表示与高和低延伸纤维有关的参数。下面将讨论应力-应变曲线的各种特征。

### 7.4.1　弹性行为

对于由连续纤维组成的单向混杂复合材料，Chamis 和 Sinclair(1979)基于复合材料细观力学方法、线性叠层板理论和有限元分析，研究了它们的弹性性能，其结论是：这些方法可以近似地估计出相同的弹性性能，由细观力学方程所估计的沿厚度方向的弹性性能与有限元结果相当吻合。

为简便起见，下面仅介绍由复合材料细观力学方法所获得的结果。分析模型是由两个分量(Chamis 和 Sinclair 把它称为主要的复合材料和次要的复合材料)所组成的层内混杂复合材料(见图 7.27)。因为这两个分量是可互换的，所以可以把它们看为高模量(HM)和低模量(LM)分量。在下面，下标 1，2 和 3 分别表示层内混杂复合材料沿纤维方向、垂直于纤维方向及沿厚度方向。

沿 1 方向的有效纵向杨氏模量，可以采用等应变假定来近似

$$E_{11}=E_{11}^{HM}+(E_{11}^{LM}-E_{11}^{HM})V_{LM} \tag{7.76}$$

式中，$E_{11}^{HM}$和 $E_{11}^{LM}$分别表示 HM 复合材料和 LM 复合材料的纵向杨氏模量；$V_{LM}$为 LM 复合材料的体积分数，且有 $V_{LM}+V_{HM}=1$。$E_{11}^{HM}$和 $E_{11}^{LM}$均可用纤维和基体的性能来表达。

沿 2 方向的有效横向杨氏模量，可以通过假定沿 2 方向的一连串的 HM 和 LM 分量连接在一起来获得

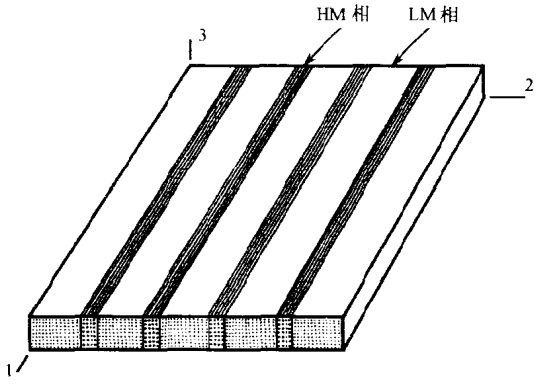



图 7.27　由主要(HM)相和次要(LM)相组成的层内混杂复合材料层板

$$E_{22}=E_{22}^{\mathrm{HM}}\Big/\left[1+\left(\frac{E_{22}^{\mathrm{HM}}}{E_{22}^{\mathrm{LM}}}-1\right)V_{\mathrm{LM}}\right] \tag{7.77}$$

式中，$E_{22}^{\mathrm{HM}}$和 $E_{22}^{\mathrm{LM}}$分别表示 HM 复合材料和 LM 复合材料的横向杨氏模量。同样，$E_{22}^{\mathrm{HM}}$和 $E_{22}^{\mathrm{LM}}$可用纤维和基体的性能及每一组分相的纤维体积分数来表达。

沿 3 方向(厚度方向)的有效横向杨氏模量，可以通过假定组分相沿 3 方向是平行的来获得

$$E_{33}=E_{33}^{\mathrm{HM}}+(E_{33}^{\mathrm{LM}}-E_{33}^{\mathrm{HM}})V_{\mathrm{LM}} \tag{7.78}$$

式中，$E_{33}^{\mathrm{HM}}$和 $E_{33}^{\mathrm{LM}}$分别表示由 HM 纤维和 LM 纤维所组成的单向复合材料的横向杨氏模量。因为已假定单向全 HM 纤维或全 LM 纤维复合材料是横向同性的，所以，$E_{33}(=E_{22})$的表达式可以用来把 $E_{33}^{\mathrm{HM}}(E_{33}^{\mathrm{LM}})$与组分材料性能联系起来。值得注意的是，对于纱线排列的单向层内混杂复合材料单层，$E_{22}\neq E_{33}$，可见，此类复合材料不是横向同性的。

面内剪切模量 $G_{12}$可以采用等应力假定来获得

$$G_{12}=G_{12}^{\mathrm{HM}}\Big/\left[1+\left(\frac{G_{12}^{\mathrm{HM}}}{G_{12}^{\mathrm{LM}}}-1\right)V_{\mathrm{LM}}\right] \tag{7.79}$$

类似地，层间剪切模量 $G_{23}$可由下式来表达

$$G_{23}=G_{23}^{\mathrm{HM}}\Big/\left[1+\left(\frac{G_{23}^{\mathrm{HM}}}{G_{23}^{\mathrm{LM}}}-1\right)V_{\mathrm{LM}}\right] \tag{7.80}$$

层间剪切模量 $G_{13}$，可以通过假定组分相沿 3 方向是平行连结来获得，这样，类似于式(7.76)，可以获得下列表达式

$$G_{13}=G_{13}^{\mathrm{HM}}+(G_{13}^{\mathrm{LM}}-G_{13}^{\mathrm{HM}})V_{\mathrm{LM}} \tag{7.81}$$

在式(7.79)～(7.81)中，组分相的剪切模量再次与组分纤维和基体性能联系起来。

泊松比 $\nu_{12}$和 $\nu_{32}$，可以通过元素沿 1 方向和 3 方向是平行的来获得

$$\nu_{12} = \nu_{12}^{HM} + (\nu_{12}^{LM} - \nu_{12}^{HM})V_{LM} \tag{7.82}$$

$$\nu_{32} = \nu_{32}^{HM} + (\nu_{32}^{LM} - \nu_{32}^{HM})V_{LM} \tag{7.83}$$

对于 $\nu_{13}$的推导，可以假定沿 1 方向和 3 方向分别是等应力和等应变状态，其结果是

$$\nu_{13} = \nu_{13}^{HM} + \frac{V_{LM}(\nu_{13}^{LM} - \nu_{13}^{HM})}{(1 - V_{LM})\dfrac{E_{33}^{HM}}{E_{33}^{LM}} + V_{LM}} \tag{7.84}$$

层内混杂复合材料弹性性能的实验测量可以在 Chamis 和 Sinclair(1979)及 Gruber 和 Chou(1983)的工作中找到。Chamis 和 Sinclair 也研究了单向层内混杂复合材料的热性能，建议用线性叠层板理论来估计热膨胀系数。

### 7.4.2 第一断裂应变

应力-应变曲线的线性部分通常延伸超过纯 LE 纤维复合材料的破坏应变(图 7.26 中的点 $A'$)，混杂复合材料中的 LE 纤维的第一断裂在应变为 $\varepsilon_{Lu}$时发生(图 7.26 中的点 $A$)，这个现象称为“混杂效应”。下面介绍 Aveston 和 Kelly(1980)的纤维第一断裂应变的研究。

由高和低延伸纤维组成的单向混杂复合材料如果满足下列条件

$$V_{HE} \geqslant \frac{\sigma_{Lu}}{\sigma_{Hu} + \sigma_{Lu} - \sigma_H'} \tag{7.85}$$

则在低延伸分量的第一断裂发生后，仍能继续承受全部荷载。这里，$\sigma_u$ 表示破坏应力，$V$ 表示纤维体积分数，下标 L 和 H 分别表示 LE 分量和 HE 分量，而 $\sigma_H'(=\varepsilon_{Lu}E_H)$则为 LE 分量破坏时的 HE 分量的应力。对于具有直至 $\varepsilon_{Lu}$时均为弹性的 HE 分量和 LE 分量，上述条件也可以按照高延伸分量的破坏应变来表达

$$\varepsilon_{Hu} \geqslant \varepsilon_{Lu}(1 + \alpha) \tag{7.86}$$

其中

$$\alpha = \frac{E_{LE}V_{LE}}{E_{HE}V_{HE}} \tag{7.87}$$

很明显，由纤维断裂引起的应力重新分布在此处未作考虑。

采用多级断裂和约束破坏的概念，可以知道图 7.26 中的 $A$ 和 $B$ 之间曲线的第一断裂应变 $\varepsilon_{Lu}$和延伸率的大小。人们已经证实第一断裂应变是与尺寸有关的，这里所论及的尺寸实质上是指纤维束的有效直径、在某一固定纤维体积分数时的纤维束间距及层间混杂复合材料中的层片厚度。

当层间混杂复合材料在超过第一断裂应变后而发生变形时，在低延伸相中将出现裂纹面垂直于荷载轴的平行裂纹。裂纹间距取决于第一破坏发生后的组分板

之间的粘结特性。如果它们仍保持为弹性粘结，那么，裂纹间距就由裂纹处的最大界面切应力 $\tau_{max}$ 来确定。另一方面，如果荷载是通过组分相之间的摩擦粘结来传递，那么，裂纹间距就应由极限粘结强度 $\tau_s$ 来确定。在这两种情形中，穿过低延伸分量板厚度的裂纹的形成，导致在该板中的材料对裂纹两边的松弛。复合材料应力-应变曲线的几乎平坦的部分（即图 7.26 中的 $AB$ 段）是低延伸相的多级断裂及试样的相关延伸的结果。

由低延伸分量在裂纹面上原来所承担的应力必须转移到高延伸相中，由此传到高延伸相上的最大附加应力可以用下式来估计

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_a}{V_{HE}} - \frac{\sigma_a E_{HE}}{E_c} \tag{7.88}$$

式中，$\sigma_a$ 为施加应力；$E_c$ 为复合材料的杨氏模量。式(7.88)右边的第 1 项是作用在裂纹面上的应力，而第 2 项给出了高延伸分量中远离裂纹面的应力。在裂纹每边的一段短距离中，由高延伸分量所承担的附加荷载导致试样端部伸长 $\delta l$。

HE 分量和 LE 分量之间的荷载传递的概念解释了在第一断裂发生时的应变 $\varepsilon_{Lu}$ 为什么取决于组分相的分散性。当使用较细的纤维或较薄的层片时，两组分相之间的每单位体积的界面面积增加，这也意味着增加了从桥接裂纹的 HE 分量返回到 LE 层的荷载传递效率，由于这个原因，这个分量的附加受应变长度及试样端部的位移 $\delta l$ 因此而减小。$\delta l$ 和 $E_c\varepsilon_{Lu}$ 的乘积给出了从加载系统到形成裂纹时所做功的上限。假定断裂表面功（$\gamma$）为常量，$\delta l$ 的减小将达到如此的点以致在所需的断裂功可以从系统中提取出来之前，$\varepsilon_{Lu}$ 必须超过纯 LE 复合材料的破坏应变值。在具有弹性粘结界面的层间混杂复合材料的情形中，厚度为 $h$ 的低延伸相的断裂应变可以用下式来计算

$$\varepsilon_{Lu} = \left[\frac{2\gamma_{LE}V_{LE}}{E_c\alpha}\left(\frac{E_c G_{LE}}{E_{HE}E_{LE}}\right)^{1/2}\frac{1}{V_{HE}^{1/2}h}\right]^{1/2} \tag{7.89}$$

上式可以估计 $\varepsilon_{Lu}$ 随板厚度的反平方根的变化。混杂效应的这种估计，与玻璃/碳/玻璃叠层板当碳纤维板的绝对厚度较小时其破坏应变较大的实验观察相符。

纤维复合材料的多级断裂理论具有十分广泛的应用。多级断裂通常发生在多相系统的脆性相中——或者是基体，或者是直线铺排的纤维复合材料的纤维相，或者是非混杂复合材料的低延伸层，或者是层间混杂复合材料中 LE 纤维增强的层。Aveston 和 Kelly 概括了具有弹性和滑动摩擦粘结的混杂和非混杂复合材料的最小裂纹间距的分析表达式、第一断裂应变及最大界面应力。

上述的讨论对 7.1 节中涉及使人困惑的混杂复合材料**协同效应**的问题已经给出了答案，对荷载分担问题的回答也是明确的。混杂复合材料中纤维与基体之间的粘结可以保证第一断裂发生后，LE 纤维能继续承担部分的施加荷载及对总体刚度起一份作用（Bunsell and Harris 1974）。根据粘结良好的层间混杂复合材料的多级断裂的实验观察及伴随应力-应变曲线上的反复荷载下降的声发射的输出，

LE 纤维所分担的荷载是明显的。图 7.26 中曲线 $BC$ 的上升归因于高延伸纤维的承载，混杂复合材料的破坏应变(点 $D$)总是小于高延伸纤维的破坏应变(点 $G$)。这是因为 LE 纤维的多级断裂和 HE 与 LE 纤维增强板之间的部分脱胶，所以，层间混杂复合材料中的 HE 层不能均匀地沿其长度拉伸到最终应变水平。另一方面，如果在第一断裂应变 $\varepsilon_{Lu}$时脱胶是完全的，那么，应力-应变曲线将沿 $OAEF$ 路线。注意，图 7.26 中的 $EF$ 和 $BC$ 具有相同的斜率，而且完全脱胶的混杂复合材料的最终破坏应变(点 $G$)高于部分脱胶的混杂复合材料的最终破坏应变。

### 7.4.3 泊松效应

在混杂复合材料的变形中，另一个需要考虑的因素是由泊松效应导致的层间应力(Aveston and Kelly 1980)，这种效应存在于混杂或非混杂的复合材料叠层板中。为了说明泊松应变的大小及其对叠层复合材料的径向劈裂所包含的内容，不妨以 3 层非混杂正交叠层板为例。在这种情形中，中间的 LE(90°)层是夹在两 HE(0°)层中的。这样，从这个例子中导出的结论通常可以应用到层间混杂复合材料中去。由泊松效应产生的应变仅取决于组分相的体积分数，不过，可以把 LE 层变得足够薄来使单层板的断裂减到最小。

对于由泊松效应引起径向劈裂的临界应变可以基于图 5.1 来导出。令下标 1 和下标 2 分别表示纵向和横向纤维方向，$x,y,z$ 为正交叠层板的参考坐标轴。在简单拉伸 $\varepsilon_{yy}$的条件下，如果 0°层和 90°层的变形是独立的，那么，将引起下列应变：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{xx}(0°) &= \nu_{12}\varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{xx}(90°) &= \nu_{21}\varepsilon_{yy}\end{aligned}\right\} \tag{7.90}$$

对于承受 $\varepsilon_{yy}$的复合材料叠层板(见图 5.1)，在 $x$ 方向引起的应变是

$$\varepsilon_{xx} = \nu_{yx}\varepsilon_{yy} \tag{7.91}$$

其中

$$\nu_{yx} \cong \frac{b}{b+h}\nu_{12} + \frac{h}{b+h}\nu_{21} \tag{7.92}$$

由于在 $x$ 方向的正应变中的 0°和 90°层相容性的需要，应逐步建立每一层的应力 $\sigma_{xx}$，这些应力由下式近似给出

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xx}(0°) &= E_{22}[\varepsilon_{xx}(0°) - \varepsilon_{xx}] = \Delta\varepsilon_{xx}(0°)E_{22}\\ \sigma_{xx}(90°) &= E_{11}[\varepsilon_{xx}(90°) - \varepsilon_{xx}] = \Delta\varepsilon_{xx}(90°)E_{11}\end{aligned}\right\} \tag{7.93}$$

式中，$\varepsilon_{xx}$为叠层板的横向应变。由叠层板横向力的平衡，有

$$\sigma_{xx}(0°) \times 2b + \sigma_{xx}(90°) \times 2h = 0 \tag{7.94}$$

根据式(7.90)～(7.94)，在 0°层中由泊松效应引起的横向应变是

$$\Delta\varepsilon_{xx}(0°) = \frac{E_{11}h(\nu_{12} - \nu_{21})\varepsilon_{yy}}{(h+b)E_c} \tag{7.95}$$

其中

$$E_c = E_{22}\frac{b}{h+b} + E_{11}\frac{h}{h+b} \tag{7.96}$$

如果在图 5.1 所示的叠层板中的 0°层和 90°层是不同材料，那么，就需要区分式(7.95)中的弹性常数

$$\Delta\varepsilon_{xx}(0°) = \frac{E_{11}(90°)h[\nu_{12}(0°) - \nu_{21}(90°)]\varepsilon_{yy}}{bE_{22}(0°) + hE_{11}(90°)} \tag{7.97}$$

### 7.4.4 热膨胀

在叠层混杂复合材料中，由组分相的热膨胀可以引起附加应变。碳/玻璃混杂系统是一种典型的情形，其中，玻璃层的纵向热膨胀系数比碳层的大得多。作为热膨胀的差异，在碳层中将产生压应力。这种热引起的压缩可以部分计及通常在碳/玻璃混杂复合材料中所观察到的混杂效应(Bunsell and Harris 1974)。在具有高和低延伸这样的混杂复合材料中，约束热应变可以表达成(Aveston and Kelly 1980)

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_L^T &= \frac{\Delta T E_{HE} V_{HE}}{E_c}(\alpha_{LE} - \alpha_{HE})\\ \varepsilon_H^T &= \frac{\Delta T E_{LE} V_{LE}}{E_c}(\alpha_{HE} - \alpha_{LE})\end{aligned}\right\}$$

式中，$\Delta T$=应力消除温度－工作温度；$\alpha_{LE}$和 $\alpha_{HE}$表示热膨胀系数。热应变分量与纤维或单层尺寸无关，断裂应变与低延伸相的关系在外荷载和热荷载作用下是相同的。因此，Aveston、Cooper 和 Kelly(1971)的多级断裂的研究仍然可以应用于这种情形。

## 7.5 强度理论

关于混杂复合材料强度问题的讨论，首先介绍描述高延伸纤维和低延伸纤维对混杂复合材料荷载承担能力贡献的混合法则型的方法，在此方法中，假定纤维的强度是均匀的，并且不考虑由纤维断裂引起的应力重新分布；然后再介绍统计强度理论，建立局部应力集中的 LE 纤维与 HE 纤维之间的协同效应及纤维强度分布模型来估计混杂复合材料的第一破坏强度和最终破坏强度。

### 7.5.1 混合法则

单向混杂复合材料的最终拉伸强度可以根据不同体积分数时组分相的贡献来估计。对于具有低延伸纤维的二元复合材料，当加入少量的较高延伸的纤维时，该复合材料的强度就有所降低，这是因为当较低延伸纤维发生断裂时，较高延伸的纤维不能再承担荷载。混杂复合材料的最终拉伸强度 $\sigma_{cu}$由下式给出(Aveston and Kelly 1980)

$$\sigma_{cu} = \sigma_{Lu}V_{LE} + \varepsilon_{Lu}E_{HE}V_{HE} \tag{7.98}$$

式中，$\varepsilon_{Lu}$为混杂复合材料中LE纤维的破坏应变。低延伸纤维的破坏导致混杂复合材料的破坏，并且不发生多级断裂。

随着高延伸纤维含量的增加，当有足够的高延伸纤维的体积承担荷载至低延伸纤维发生破坏时，会发生破坏模式的转变。此破坏模式是一种脆性纤维的多级破坏，最终拉伸强度可表示为

$$\sigma_{cu} = \sigma_{Hu}V_{HE} \tag{7.99}$$

HE纤维的体积分数应超过由式(7.85)给出的低限，以便承担第一断裂应变时的全部荷载。Aveston和Kelly(1980)应用式(7.98)和式(7.99)分析了Kalnin(1972)的实验数据，Kalnin曾经研究过碳/玻璃环氧层间混杂的破坏应力。图7.28示出了混杂复合材料的最终拉伸强度与相对玻璃纤维含量的变化趋势。其应力是用荷载除以纤维的横截面面积来计算的，因而忽略了环氧基体的贡献。Aveston和Kelly曾经建议，对于这种特殊的实验系统，碳纤维的断裂不会产生引起玻璃纤维削弱的大应力集中。

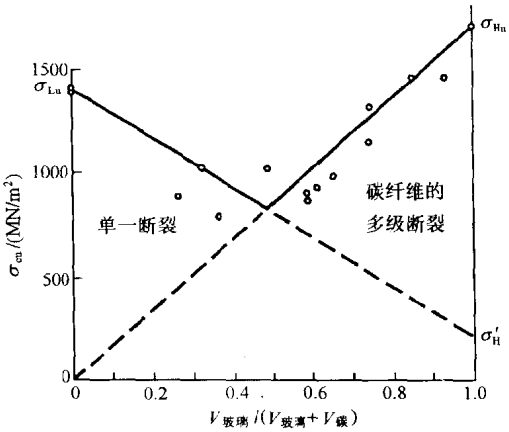


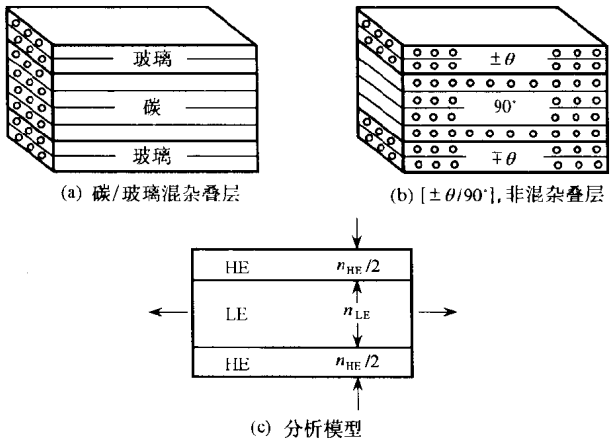

图7.28 单向碳/玻璃/环氧混杂复合材料的强度与相对纤维体积分数的关系

### 7.5.2 Fukunaga理论

在7.4.2中已经表明，单向混杂复合材料及正交叠层板的第一破坏现象均具有相同的物理原理的基础。在LE纤维和HE纤维组成的单向混杂复合材料中，受拉伸的混杂复合材料中的LE纤维的破坏应变通常大于单一LE纤维复合材料的破坏应变。另一方面，在非混杂$[\pm\theta^\circ/90^\circ]_s$($0^\circ<\theta<90^\circ$)叠层板中，受拉伸的90°(LE)层的厚度越薄，其破坏强度(应变)越高。我们也知道，里面的90°层的破坏强度(应变)取决于外侧$\pm\theta^\circ$层的材料性能，因而，在由含有两种不同类型的材料性能的层板所组成的复合材料(如混杂复合材料)中及在$[\pm\theta^\circ/90^\circ]_s$非混杂复合材料

中，LE 层的破坏强度(应变)不是一种固有的材料性能，而是取决于 HE 材料的性能及层板的几何排列。

Fukunaga 等(1984)基于统计方法，研究了混杂和非混杂复合材料的第一破坏强度。所考虑的复合材料是一种由单向玻璃纤维和碳纤维层板组成的夹层结构(见图 7.29(a))；非混杂复合材料是一种具有$[\pm\theta/90°]_s$构造的碳纤维复合材料(见图 7.29(b))。两种复合材料均可用图 7.29(c)的 HE 和 LE 表示来描述，其中，$n_{HE}$和$n_{LE}$分别为 HE 和 LE 层板数，于是，混杂复合材料的总层板数 $n=n_{HE}+n_{LE}$。



(a) 碳/玻璃混杂叠层　(b) $[\pm\theta/90°]_s$非混杂叠层

(c) 分析模型

图 7.29

Fukunaga 等基于图 4.3 所示的链式统计模型，把复合材料视为一系列的短叠层板所串成，每一叠层具有相当于无效长度的长度($\delta$)，试样的长度 $l=m\delta$。为了求出整个叠层复合材料的第一板破坏强度，假定 LE 单层和 HE 单层的破坏应变服从两参数累积韦布尔分布

$$\left.\begin{aligned} F_{LE}(\varepsilon) &= 1-\exp[-(\varepsilon/\varepsilon^*_{LE})]^{\beta_{LE}} \\ F_{HE}(\varepsilon) &= 1-\exp[-(\varepsilon/\varepsilon^*_{HE})]^{\beta_{HE}} \end{aligned}\right\} \tag{7.100}$$

式中，$\varepsilon^*$和 $\beta$ 分别表示尺度参数和形状参数。于是，复合材料的第一板破坏应变的累积分布函数 $H_c(\varepsilon)$可以根据最弱环模型来获得

$$H_c(\varepsilon)=1-[1-G_c(\varepsilon)]^m \tag{7.101}$$

其中的 $G_c(\varepsilon)$为短叠层的第一板破坏应变的累积分布函数，并由下式给出

$$G_c(\varepsilon)=1-[1-F_{LE}(\varepsilon)]^{n_{LE}}[1-F_{HE}(\varepsilon)]^{n_{HE}} \tag{7.102}$$

将式(7.100)代入式(1.102)，再将其代入式(7.101)，有

$$H_c(\varepsilon)=1-\exp[-mn_{LE}(\varepsilon/\varepsilon^*_{LE})^{\beta_{LE}}mn_{HE}(\varepsilon/\varepsilon^*_{HE})^{\beta_{HE}}] \tag{7.103}$$

应该指出，上式仅涉及复合材料叠层板的第一板破坏应变而不涉及复合材料中 LE 相的破坏应变，这是因为，根据统计的观点，LE 层的破坏不总是先于 HE 层的破坏。类似于式(7.103)的推导，单一 LE 纤维复合材料(与混杂复合材料具有相同的

尺寸)的第一板破坏应变的累积分布函数是

$$H_{LE}(\varepsilon) = 1 - \exp[-mn(\varepsilon/\varepsilon^*_{LE})^{\beta_{LE}}] \tag{7.104}$$

Fukunaga 等比较了 HE/LE/HE 叠层和单一 LE 叠层在 50%的破坏概率时的破坏应变。根据式(7.103)和式(7.104),有

$$\left.\begin{aligned} &\frac{n_{LE}}{n}\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon^*_{LE}}\right)^{\beta_{LE}} + \frac{n_{HE}}{n}\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon^*_{HE}}\right)^{\beta_{HE}} = \frac{\ln 2}{mn} \\ &\left(\frac{\varepsilon_{LE}}{\varepsilon^*_{LE}}\right)^{\beta_{LE}} = \frac{\ln 2}{mn} \end{aligned}\right\} \tag{7.105}$$

式中,$\varepsilon_c$ 和 $\varepsilon_{LE}$分别表示混杂复合材料和 LE 复合材料的统计平均破坏应变。为了获得统计平均破坏应变比($\varepsilon_c/\varepsilon_{LE}$)与 LE 材料的相对体积分数($n_{LE}/n$)之间的一种明确关系,考虑 $\beta_{LE}=\beta_{HE}=\beta$。于是,式(7.105)成为

$$\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{LE}} = \left(\frac{n_{LE} + n_{HE}/(\varepsilon^*)^{\beta}}{n}\right)^{-1/\beta} \tag{7.106}$$

其中,$\varepsilon^* = \varepsilon^*_{HE}/\varepsilon^*_{LE}$。式(7.106)中的 $\varepsilon_c/\varepsilon_{LE}$与复合材料尺寸无关。通过假定 HE 层和 LE 层的线性应力-应变关系,可以容易地获得第一板破坏强度比($\sigma_c/\sigma_{LE}$)

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_{LE}} = \frac{E_c}{E_{LE}}\left(\frac{n_{LE} + n_{HE}/(\varepsilon^*)^{\beta}}{n}\right)^{-1/\beta} \tag{7.107}$$

式中,$E$ 表示沿纤维方向的杨氏模量;$E_c=(n_{LE}E_{LE}+n_{HE}E_{HE})/n$。

对于碳/玻璃/环氧单向混杂复合材料,假定 $\varepsilon^*=3.0$,$E_{HE}/E_{LE}=1/3$,用式(7.106)和式(7.107)进行数值计算。图 7.30 示出了式(7.106)与 Manders 和 1981 年 Bader 对 HTS 碳/玻璃混杂叠层板给出的实验结果的比较,可见,当 $\beta=10$ 时,分析结果与实验结果较为符合。图 7.31 示出了复合材料第一破坏强度随 LE 层和 HE 层的相对体积分数的变化趋势,图中的点 $A$ 和点 $D$ 分别表示玻璃和碳纤维复合材料的强度,线 $BD(\sigma_c/\sigma_{LE}=E_c/E_{LE})$表示碳纤维层发生破坏时混杂复合材料的

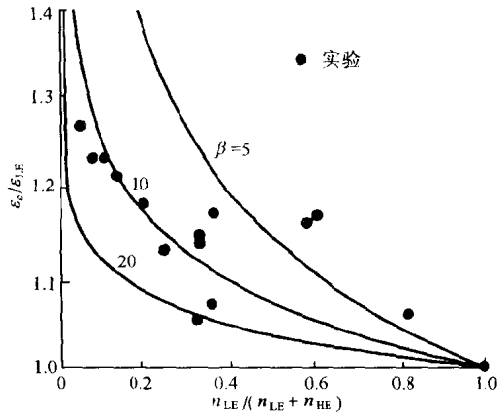



图 7.30 Fukunaga 等对HTS 碳/玻璃混杂叠层的分析估计与 Manders 和 Bader 的实验比较

应力，线 $AE(\sigma_c/\sigma_{LE}=n_{HE}/(n_{LE}+n_{HE}))$表示假定混杂复合材料中 LE 层不承担荷载时的应力。当形状参数 $\beta$ 减小时，混杂复合材料的第一板破坏应变和强度相对单一碳纤维复合材料的破坏应变和强度的增加而增加；当 $\beta\to\infty$时，即为复合材料中的 LE 层和 HE 层的破坏应变无分散性的情形，混杂复合材料的第一板破坏应变与纯 LE 复合材料的破坏应变是相同的。图 7.31 中 $\beta\to\infty$时的关系等价于混杂复合材料中的第一破坏应变的混合法则。

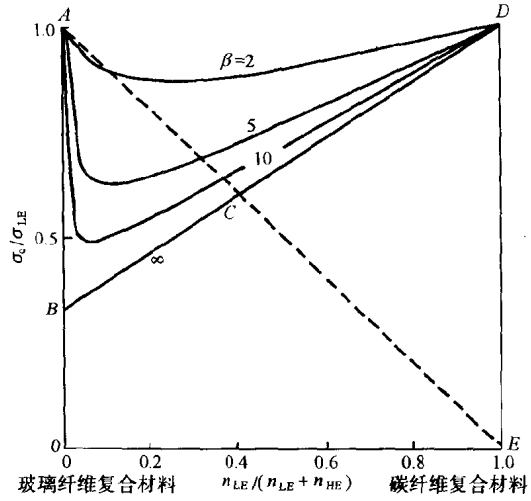



图 7.31　玻璃/碳/玻璃混杂叠层的第一破坏强度 $\sigma_c$(用 $\sigma_{LE}$正化)

$\beta_{LE}=\beta_{HE}=\beta,\varepsilon^*=3.0,E_{HE}/E_{LE}=1/3$

$\varepsilon_c/\varepsilon_{LE}$随[$\pm\theta$°/90°]$_s$叠层的相对 90°层体积分数的变化趋势类似于图 7.30 给出的变化趋势，对于给定的某一形状参数值，$\varepsilon_c/\varepsilon_{LE}$随 $\theta$ 角的增加而减小。

Fukunaga 等(1984)对混杂和非混杂复合材料第一破坏的统计强度分析说明了一种容积关系，表明了由低延伸和高延伸材料组成的复合材料的第一破坏应变或强度比单一低延伸纤维复合材料的大，这是一种“尺寸效应”的结果，即具有较小尺寸的低延伸材料的复合材料的破坏概率是较小的。

### 7.5.3　层内混杂复合材料的破坏机制及协同效应

混杂复合材料由于增强相的增多和具有**协同效应**，其拉伸破坏机制比单一纤维复合材料复杂，是一种复杂的随机过程。此外，正如以前所述，纤维的强度具有明显的分散性，纤维的断裂也往往会产生应力集中。下面将介绍考虑纤维强度的变化性和应力重新分布的各种统计模型、理论和方法。

1. Zweben 方法

1977 年 Zweben 首次采用统计理论研究了层内混杂复合材料的**破坏机制**与**混**

**杂效应**。他的分析模型假定 LE 纤维和 HE 纤维在单向层板中是均匀相间排列的(图 7.2),LE 纤维的断裂引起断纤维邻近的局部应力集中,HE 纤维将在应力(应变)集中处发生断裂。Zweben 建议,预期第一根过应力的 HE 纤维断裂时的应变水平可以作为混杂复合材料最终应变的下限。设图 7.2 所示试样的纵向长度和横向宽度分别为 $L$ 和 $W$,$N$ 为试样中的纤维总数($N=W/d_f$),其中分别含有 $\frac{1}{2}N$ 根 LE 纤维和 $\frac{1}{2}N$ 根 HE 纤维。注意,这里所指的"纤维"或者是单丝或者是纱。

假定纤维承担全部的施加荷载,并且在整个复合材料中,纤维在荷载作用下将以随机的方式发生断裂。注意力主要集中在 LE 纤维断裂后,断口邻近发生什么。采用复合材料的应变作为独立变量,当某根 LE 纤维在应变水平 $\varepsilon$ 下发生断裂时,两根邻近的 HE 纤维将承受 $K_h\varepsilon$ 的应变集中,其中 $K_h$ 为与单根断 LE 纤维有关的应变集中因子。由于 Zweben 模型假定轴向应力仅与轴向应变有关,故这两根纤维的应力从 $E_{HE}\varepsilon$ 增至 $K_hE_{HE}\varepsilon$。由于某根纤维的断裂而使纤维应力受扰动的轴向距离被认为是无效长度(Rosen 1964)。Zweben 把混杂复合材料中与某根断裂的 LE 纤维有关的无效长度用 $\delta_h$ 来表示。

类似于图 4.3,混杂复合材料是由一系列的轴向尺寸为 $\delta_h$ 的链节所组成(链式模型),链节总数为 $n_h=L/\delta_h$。Zweben 假设第一根过应力的 HE 纤维发生断裂时的应变水平表示混杂复合材料最终应变的下限,局部应变集中引起的纤维断裂的扩展导致复合材料的破坏。

长为 $L$ 的 LE 纤维和 HE 纤维的破坏应变的累积分布函数假定为韦布尔分布的形式

$$\left.\begin{aligned} F_{LE}(\varepsilon) &= 1-\exp(-pL\varepsilon^q) \\ F_{HE}(\varepsilon) &= 1-\exp(-rL\varepsilon^s) \end{aligned}\right\} \tag{7.108}$$

式中,$p$,$q$,$r$ 和 $s$ 为韦布尔参数。混杂复合材料中第一根过应力的 HE 纤维发生断裂时的复合材料应变由下式给出

$$\varepsilon_h = [NLpr\delta_h(K_h^s-1)]^{-1/(q+s)} \tag{7.109}$$

由于在此模型中已假定线弹性变形,故 $K_h$ 也是应力集中因子。对于用 $N$ 根相同类型的纤维增强的复合材料,式(7.109)成为

$$\varepsilon = [2NLp^2\delta_{LE}(K_{LE}^q-1)]^{-1/2q} \tag{7.110}$$

这里,$K_{LE}$和 $\delta_{LE}$分别为 LE 纤维复合材料的应变集中因子和无效长度。

根据式(7.109)和式(7.110),Zweben 获得了混杂复合材料的破坏应变下限与相同长度的 LE 纤维复合材料的破坏应变下限之比

$$R_\varepsilon = \frac{\varepsilon_h}{\varepsilon} = \frac{[NLpr\delta_h(K_h^s-1)]^{1/(q+s)}}{[2NLp^2\delta_{LE}(K_{LE}^q-1)]^{-1/2q}} \tag{7.111}$$

上式表明,破坏应变比取决于韦布尔参数($p$,$q$,$r$ 和 $s$)、试样长度($L$)、无效长度($\delta_h$

和 $\delta_{LE}$)、应变集中因子($K_h$ 和 $K_{LE}$)。Zweben 根据复合材料中的纤维弹性性能和纤维排列的几何参数,推导出了这些参数的近似表达式。

为了方便评价混杂复合材料的破坏特性,式(7.111)可以由假定 LE 纤维和 HE 纤维在拉伸破坏方面具有相同的变异系数来进行简化。对于 $q=s$ 这一情形,式(7.111)成为

$$R_\epsilon = \left(\frac{r}{p}\right)^{-1/2q}\left[\frac{\delta_h(K_h^q-1)}{2\delta_{LE}(K_{LE}^q-1)}\right]^{-1/2q} \tag{7.112}$$

根据式(7.108),标距长度为 $l$ 的 LE 纤维和 HE 纤维的平均应变是

$$\left.\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{LE}(l) &= (pl)^{-1/q}\Gamma\left(1+\frac{1}{q}\right)\\ \bar{\varepsilon}_{HE}(l) &= (rl)^{-1/s}\Gamma\left(1+\frac{1}{s}\right)\end{aligned}\right\} \tag{7.113}$$

于是,当 $q=s$ 时,将式(7.113)代入式(7.112),有

$$R_\epsilon = \left(\frac{\bar{\varepsilon}_{HE}}{\bar{\varepsilon}_{LE}}\right)^{-1/2}\left[\frac{\delta_h(K_h^q-1)}{2\delta_{LE}(K_{LE}^q-1)}\right]^{-1/2q} \tag{7.114}$$

如果纤维的变异系数较小(即 5%或更小)而形状参数较大($q>25$),式(7.114)可以进一步简化。对于 $K_{LE}^q-1\approx K_{LE}^q$ 及 $K_h^q-1\approx K_h^q$ 这一情形,式(7.114)简化为

$$R_\epsilon = 2^{1/2q}\left(\frac{\bar{\varepsilon}_{HE}}{\bar{\varepsilon}_{LE}}\right)^{-1/2}\left(\frac{\delta_{LE}}{\delta_h}\right)^{1/2q}\left(\frac{K_{LE}}{K_h}\right)^{1/2} \tag{7.115}$$

上式表明,破坏应变的下限比对平均纤维破坏应变及应变集中因子是敏感的,而在低纤维变异系数的假定下,它对无效长度是不敏感的。对于 Kevlar 49/T 300 层内混杂复合材料,Zweben 获得:$K_h=1.462$,$K_{LE}=1.293$,$\delta_h/\delta_{LE}=1.573/1.531=1.03$,$\bar{\varepsilon}_{HE}/\bar{\varepsilon}_{LE}=1.63$。假定 HE 纤维和 LE 纤维的变异系数约为 6%,取韦布尔参数 $q=20$,将这些值代入式(7.115),求得 $R_\epsilon=1.22$。

尽管使用了简化的假定,Zweben 模型实质上估计了 HE 纤维加进 LE 纤维复合材料里可以提高混杂复合材料的破坏应变。这一结果归因于 HE 纤维在细观力学水平上重新分配局部应力集中及行为像裂纹阻止者的能力。

2. 蒙特卡罗模拟

Fukuda 和 Chou(1982)采用蒙特卡罗模拟方法研究了混杂复合材料的强度。图 7.32 示出了一种理想的单位厚度的层内混杂复合材料,LE 纤维和 HE 纤维假定相间排列。为了数值计算上的目的,考虑含有 3 根 LE 纤维和 2 根 HE 纤维的 5 纤维区域。遵循图 4.3 给出的链式模型的记号,对于图 7.32,取 $N=5$ 和 $n=20$。此外还假定拉伸刚度($R=E_{HE}A_{HE}/(E_{LE}A_{LE})$)等于 1(非混杂复合材料)和 1/3(玻璃/碳混杂复合材料)。

采用剪滞分析计算应力集中因子。Fukuda 和 Chou 所考虑的纤维断裂模式包括了横截面内的 1,2,3 和 4 根纤维断裂的全部组合。应用剪滞分析计算了纤维断

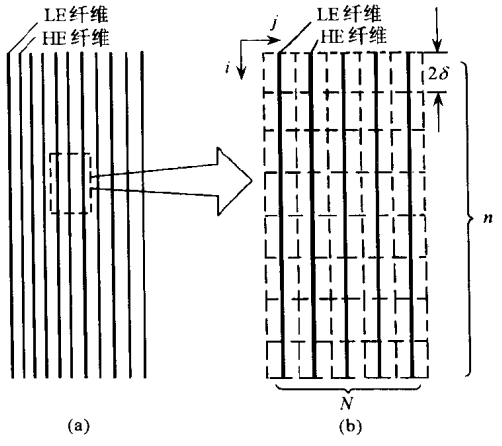



图 7.32　蒙特卡罗模拟模型

裂已经发生的层板中所有完整链节的应力集中因子。下面给出两类纤维复合材料的结果。

在第一种情形中，仅有一种纤维，其强度服从平均正化强度为 1 及标准差为 0.1 的正态分布。图 7.33(a)示出了一种典型的链节破坏次序，其中 0 表示该链节是完整的，而其他数字表示链节的破坏次序。在此模型中，$i=14$，$j=2$ 的链节首先断裂；其次是 $i=5$，$j=4$ 发生破坏；最后是在 $i=14$ 的横截面处发生破坏。在总的 100 个链节中，6 个链节发生破坏。Fukuda 和 Chou 进行了 100 次迭代运算，并发现每次迭代的断裂链节数是 5 或 6。一般来说，在非混杂复合材料中，多级纤维断裂是不广泛的。

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 4 | 5 | 6 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 13 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 11 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 4 | 0 | 0 |
| 7 | 16 | 8 | 15 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 12 | 0 | 6 | 0 | 5 |
| LE | HE | LE | HE | LE |

(a)非混杂复合材料；(b)混杂复合材料

图 7.33　纤维链节破坏次序的例子

图 7.33 示出了混杂复合材料中的链节破坏次序，由图可见，LE 纤维在加载的初始阶段倾向于断裂，此模型在 $i=10$ 的截面处发生破坏，共有 16 个链节断裂。在 100 次的迭代期间，观察到最少 5 个、最大 32 个链节发生断裂，在 1 次迭代中，断裂链节的平均值为 16.3。混杂复合材料中的多级纤维断裂的程度比非混杂复合材料情形更广泛。

图 7.34 示出了非混杂复合材料和混杂复合材料的应力-应变关系的例子。复合材料的应力 $\sigma_c$ 和应变 $\varepsilon_c$ 用 LE 纤维链节的平均最终应力($\sigma_{LINK}$)和平均最终应变($\varepsilon_{LINK}$)来使其正化。LE 纤维复合材料与混杂复合材料的第一破坏应变几乎是相同的。可是，在混杂复合材料中，LE 纤维的第一多级断裂受到 HE 纤维的阻挡，因此，混杂复合材料可以经受住更大的变形，因而具有较高的最终破坏应变。按照这一例子，最终应变比 LE 纤维复合材料的破坏应变近似增加 50%以上。

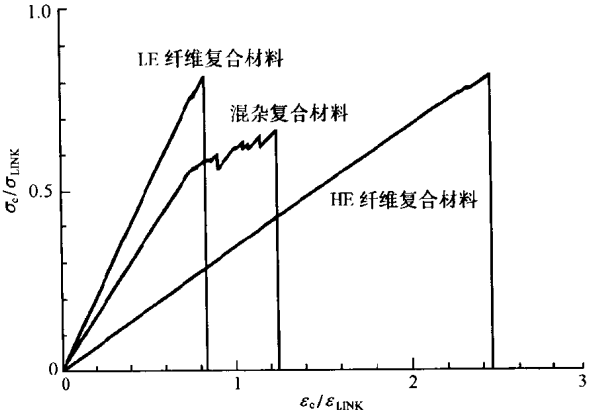



图 7.34　非混杂和混杂复合材料的正化应力-应变关系

虽然在这一数值模型中所取的纤维数目是非常少的，但是，正如在应力-应变曲线所表明的那样，破坏的逐步性质却与 Bunsell 和 Harris(1974)所获得的碳/玻璃混杂复合材料的实验曲线相似。

图 7.34 估计的混杂复合材料的最终强度比 LE 纤维和 HE 纤维复合材料的小，混杂复合材料的最终应变也比 HE 纤维复合材料的小。这使我们能够认识到这样的事实：除在裂纹面上的那些外，HE 纤维的链节受到周围 LE 链节的约束，并不能受变形至其最终应变。因此，HE 链节的强度潜力仍未完全被利用。

3. 随机扩大临界核理论

混杂复合材料的细观统计断裂问题，尚有许多问题未能得到很好的解决。Zweben(1977)采用链式统计模型研究了层内混杂复合材料的轴向拉伸破坏问题。他认为，混杂复合材料的拉伸破坏始于某一 LE 纤维的断裂，其后是邻近至少 1 根过应力的 HE 纤维的断裂，由此定义混杂复合材料的破坏。这一断裂准则显然与实际不太相符。对此，Fukuda(1983)对 Zweben 的断裂准则进行了修正，他将某一 LE

纤维发生断裂后，邻近至少 1 根过应力的 LE 纤维发生断裂定义为混杂复合材料的第一破坏。显然，以上两种断裂准则均未给出有明确物理意义的临界条件，也不足以反映混杂复合材料的断裂机制。Harlow(1981)根据简化的局部荷载分担法则，采用循环分析(recursion analysis)研究了层内混杂复合材料的统计特性。由于几何关系和破坏情况复杂，求其破坏概率相当困难。为此，许多学者(Fukuda and Chou 1982, Fariborz, Yang and Harlow 1985, Fariborz and Harlow 1987)采用 Monte Carlo 模拟法，研究了层内混杂复合材料的破坏机制。最近，Harlow (1997)基于应变的渐近分布，研究了层内混杂复合材料的统计性能，对混杂效应给出了较合理的解释。

2002 年曾庆敦等将随机扩大临界核统计模型(图 4.12)进行推广，结合含界面损伤的应力集中分析结果，首次定量地研究了含界面剪切强度效应的层内混杂复合材料的拉伸破坏问题。在下面的研究中，将采用“桥式裂纹”和随机亚临界核的概念，讨论混杂复合材料的拉伸第一破坏，随后引入了随机临界核来研究其最终破坏。其中含有断裂纤维的混杂复合材料的应力集中因子由 7.2.2 及 7.2.3 中的计及界面破坏的剪滞分析模型给出。仍用极限分析法计算逐渐增大的无效长度。

考虑如图 7.2 所示的 LE 纤维和 HE 纤维交替相间均匀排列的二维层内混杂复合材料。假设在拉伸荷载作用下的层内混杂复合材料产生了均匀应变($\varepsilon_c$)。令 LE 纤维和 HE 纤维的远场拉力分别为 $\sigma_L$ 和 $\sigma_H$。在均匀应变($\varepsilon_c$)作用下，混杂复合材料的 LE 纤维先行发生断裂，这是由于 LE 纤维的破坏应变比 HE 纤维的破坏应变小，例如碳/玻璃纤维混杂复合材料，碳(LE)纤维的破坏应变近似为玻璃(HE)纤维的破坏应变的 1/3。

对于受纵向拉伸的混杂复合材料，第一破坏起源于某些长为 $\delta^L_{0,0}$的“最弱”的 LE 纤维的孤立随机断裂，其中 $\delta^L_{0,0}$是某一无效长度。当一根 LE 纤维断裂后，其邻近的 HE 纤维和 LE 纤维将发生局部应力集中。其后的相继断裂通常不是与断裂纤维紧邻的 HE 纤维，而可能是长为 $\delta^L_{1,0}$的在过应力 $K^L_{1,0}\sigma_L$ 作用下的 LE 纤维发生断裂，这里 $K^L_{1,0}$是 LE 纤维的应力集中因子。这样，就产生了由于两根 LE 纤维相继断裂所形成的裂纹。在这个裂纹两旁的长为 $\delta^L_{2,0}$的 LE 纤维在更长范围内将受到更严重的过应力 $K^L_{2,0}\sigma_L$ 的作用，这里 $\delta^L_{2,0}>\delta^L_{1,0}=\delta^L_{0,0}$，只要其中的一根发生断裂，就形成了由 3 根相继的 LE 纤维断裂组成的裂纹。这种裂纹将继续沿纵、横两个方向随机稳定地扩展。假设连续断裂的 LE 纤维数为 $i(i\geqslant 2)$，则在这个裂纹中含有$(i-1)$根未断的 HE 纤维。这种裂纹可称为“桥式裂纹”。随着 $i$ 的增加，**桥式裂纹**中的 HE 纤维和桥式裂纹两侧的 HE 纤维的应力集中因子也随之增大。根据 7.2.3 中考虑界面损伤效应的混杂复合材料应力集中的计算结果可知，桥式裂纹中总有一些 HE 纤维承受最严重的应力集中。若 $i$ 达到某一值 $k$ 时，桥式裂纹中间承受最严重应力集中的 HE 纤维的破坏概率将大于其他 LE 纤维的破坏概率，此时的桥式裂纹则被称为**随机亚临界核**。现在，定义在混杂复合材料中只要至少有一个桥式裂纹

形成随机亚临界核，混杂复合材料就发生第一破坏，这也意味着此间 LE 纤维总是先于任一 HE 纤维发生断裂。

随着荷载的进一步增加，在随机亚临界核中承受最严重过应力的 HE 纤维也开始发生逐步断裂，这种逐步的破坏过程一直持续到断裂核达到某一临界尺寸。此时，其他未断纤维所承受的过应力将大于其统计平均强度，其破坏几乎是必然的，即裂纹的失稳扩展几乎是不可避免的。这个临界裂纹被称为**随机临界核**，因此，混杂复合材料的最终破坏可定义为至少一个裂纹形成了随机临界核。

为了计算混杂复合材料的第一破坏和最终破坏概率，必须先计算在混杂复合材料某处形成一个随机亚临界核或随机临界核的概率。计算中要涉及到纤维的强度性能、混杂复合材料中由于纤维断裂而造成的应力重分布和逐渐增大的无效长度。

假定长为 $\delta$ 的 LE 纤维和 HE 纤维的强度分布函数均服从两参数韦布尔分布

$$\left.\begin{aligned} F_{\mathrm{L}}(\sigma_{\mathrm{L}}) &= 1-\exp(-\alpha\delta\sigma_{\mathrm{L}}^{\beta}) \\ F_{\mathrm{H}}(\sigma_{\mathrm{H}}) &= 1-\exp(-\lambda\delta\sigma_{\mathrm{H}}^{\zeta}) \end{aligned}\right\} \tag{7.116}$$

式中，$\alpha,\beta,\lambda$ 和 $\zeta$ 是各自的韦布尔参数；下角标(或上角标)L 和 H 分别代表 LE 纤维和 HE 纤维。

在 7.2.3 中采用计及界面损伤的修正的剪滞分析模型，研究了界面剪切强度对混杂复合材料应力集中的影响。结果表明，应力集中与无量纲界面剪切强度($\bar{\tau}_{\mathrm{s}}$)、断裂纤维(LE 及 HE 纤维)数($i$)有关。在下面的统计分析中，将采用 7.2.2 和 7.2.3 中的计算结果。

无效长度是随断裂纤维数目的增加而逐渐扩大的，它宜取拔出或脱粘长度的 2 倍，这样可顾及基体和界面的破坏及避免采用近似方法而引起的误差积累。拔出长度可由极限平衡分析得到。拔出长度的分析模型见图 7.35。假定在混杂复合材料中有 $i$ 根 LE 纤维被拔出而所有的 HE 纤维都未断时的拔出长度为 $\frac{1}{2}\delta_{i,0}^{\mathrm{L}}$，见图 7.35(a)～(c)。按极限平衡有

$$\sigma_{\mathrm{c}}(2i-1)dh = 2\left(\frac{1}{2}\delta_{i,0}^{\mathrm{L}}\right)h\tau_{\mathrm{s}}i + \sigma_{\mathrm{H}}A_{\mathrm{HE}}(i-1) \tag{7.117}$$

式中，$\tau_{\mathrm{s}}$ 是基体或界面的剪切强度；$\sigma_{\mathrm{c}}$ 是混杂复合材料的平均拔出应力；$A_{\mathrm{HE}}$ 是 HE 纤维的横截面面积。假定 LE 纤维和 HE 纤维直径相同，用 $d_{\mathrm{f}}$ 表示，因此有 $A_{\mathrm{LE}}=A_{\mathrm{HE}}$ 及 $V_{\mathrm{LE}}=V_{\mathrm{HE}}$，此处 $A_{\mathrm{LE}}$ 是 LE 纤维的横截面面积；$V_{\mathrm{LE}}$ 和 $V_{\mathrm{HE}}$ 分别为 LE 纤维和 HE 纤维的体积分数；混杂复合材料中纤维体积分数为 $V_{\mathrm{f}}=V_{\mathrm{LE}}+V_{\mathrm{HE}}$ 或 $V_{\mathrm{f}}=A_{\mathrm{LE}}/(dh)=A_{\mathrm{HE}}/(dh)$。为了简化式(7.117)，引入混合律有

$$\sigma_{\mathrm{c}} = \sigma_{\mathrm{L}}V_{\mathrm{LE}} + \sigma_{\mathrm{H}}V_{\mathrm{HE}} \tag{7.118}$$

假定 $d_{\mathrm{f}}\approx V_{\mathrm{f}}d$，式(7.117)可写成

$$\delta_{i,0}^{\mathrm{L}} = \frac{[\sigma_{\mathrm{L}}(2i-1)+\sigma_{\mathrm{H}}]d_{\mathrm{f}}}{(2i\tau_{\mathrm{s}})} \tag{7.119}$$

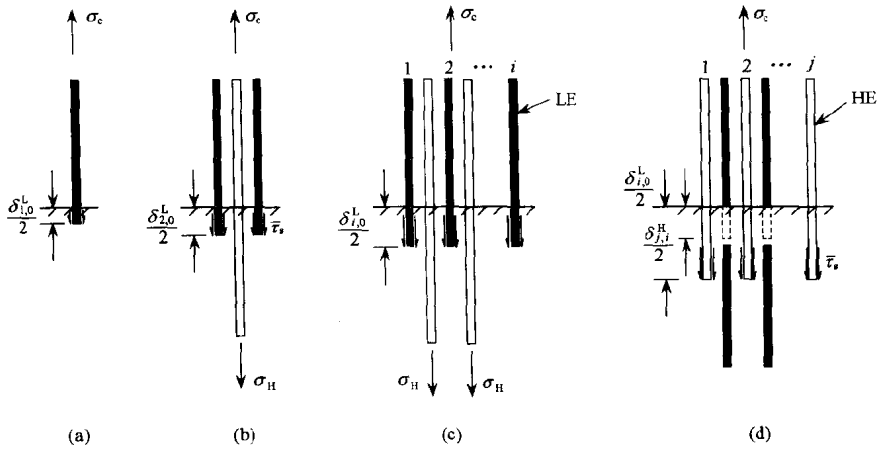



图 7.35　确定层内混杂复合材料的拔出长度的模型

$\sigma_L$ 和 $\sigma_H$ 的关系为

$$\sigma_H = \left(\frac{E_{HE}}{E_{LE}}\right)\sigma_L = R\sigma_L \tag{7.120}$$

式中，$E_{LE}$和$E_{HE}$分别为 LE 纤维和 HE 纤维的拉伸弹性模量；$R(=E_{HE}/E_{LE})$为弹性模量比(或拉伸刚度比)。式(7.119)化为

$$\delta^L_{i,0} = \frac{[(2i-1)+R]d_f\sigma_L}{(2i\tau_s)} \tag{7.121}$$

由式(7.34)并注意到 $V_f = A_{LE}/(dh) = A_{HE}/(dh)$，上式可整理为

$$\delta^L_{i,0} = \frac{[(2i-1)+R]d_f}{(2i\tau_s)}\sqrt{\frac{E_{LE}}{V_f G_m}} \tag{7.122}$$

设有 $i$ 根 LE 纤维断裂的桥式裂纹中，拔出 $j(j<i)$根 HE 纤维时的拔出长度为$\frac{1}{2}\delta^H_{j,i}$，见图 7.35(d)。考虑 $j$ 根 HE 纤维之间有$(j-1)$根已断的 LE 纤维，由极限平衡得

$$\sigma_c(2j-1)dh = 2\frac{\delta^H_{j,i}-\delta^L_{i,0}}{2}h\tau_s j \tag{7.123}$$

由上式有

$$\delta^H_{j,i} = \frac{[(2j-1)(1+R)]d_f\sigma_L}{(2j\tau_s)} + \delta^L_{i,0} \tag{7.124}$$

将式(7.121)代入式(7.124)，得

$$\delta^H_{j,i} = \left\{\frac{(2j-1)(1+R)}{j} + \frac{[(2i-1)+R]}{i}\right\}\frac{d_f\sigma_L}{(2\tau_s)} \tag{7.125}$$

再将式(7.34)代入上式得

$$\delta_{j,i}^{\mathrm{H}}=\left\{\frac{(2j-1)(1+R)}{j}+\frac{[(2i-1)+R]}{i}\right\}\frac{d_{\mathrm{f}}}{2\tau_{\mathrm{s}}}\sqrt{\frac{E_{\mathrm{LE}}}{V_{\mathrm{f}}G_{\mathrm{m}}}} \tag{7.126}$$

令 $F_{\mathrm{L}}(K_{i,0}^{\mathrm{L}}\sigma_{\mathrm{L}})$和 $F_{\mathrm{H}}(K_{j,i}^{\mathrm{H}}\sigma_{\mathrm{H}})$分别为承受过应力的 LE 纤维段和 HE 纤维段的强度分布函数，此处 $K_{i,0}^{\mathrm{L}}$和 $K_{j,i}^{\mathrm{H}}$分别为 LE 纤维和 HE 纤维的应力集中因子。考虑到式(7.116)，式(7.122)及式(7.126)，强度分布函数可写为

$$\left.\begin{aligned}F_{\mathrm{L}}(K_{i,0}^{\mathrm{L}}\sigma_{\mathrm{L}})&=1-\exp\left[-\left(\frac{K_{i,0}^{\mathrm{L}}\sigma_{\mathrm{L}}}{\tilde{\sigma}_{i,0}^{\mathrm{L}}}\right)^{\beta}\right]\\F_{\mathrm{H}}(K_{j,i}^{\mathrm{H}}\sigma_{\mathrm{H}})&=1-\exp\left[-\left(\frac{K_{j,i}^{\mathrm{H}}\sigma_{\mathrm{H}}}{\tilde{\sigma}_{j,i}^{\mathrm{H}}}\right)^{\zeta}\right]\end{aligned}\right\} \tag{7.127}$$

此处

$$\tilde{\sigma}_{i,0}^{\mathrm{L}}=(\alpha\delta_{i,0}^{\mathrm{L}})^{-1/\beta},\quad \tilde{\sigma}_{j,i}^{\mathrm{H}}=(\lambda\delta_{j,i}^{\mathrm{H}})^{-1/\zeta} \tag{7.128}$$

长为 $\delta_{i,0}^{\mathrm{L}}$的 LE 纤维的统计平均强度由下式求得

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{i,0}^{\mathrm{L}}&=\int_0^{\infty}\sigma_{\mathrm{L}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{L}}}[1-\exp(-\alpha\delta_{i,0}^{\mathrm{L}}\sigma_{\mathrm{L}}^{\beta})]\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{L}}\\&=(\alpha\delta_{i,0}^{\mathrm{L}})^{-\frac{1}{\beta}}\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right),\quad i=1,2,\cdots\end{aligned} \tag{7.129}$$

式中，$\Gamma(\cdot)$为伽马函数。同理，长为 $\delta_{j,i}^{\mathrm{H}}$的 HE 纤维的统计平均强度由下式求得

$$\bar{\sigma}_{j,i}^{\mathrm{H}}=(\lambda\delta_{j,i}^{\mathrm{H}})^{-1/\zeta}\Gamma(1+1/\zeta),\quad i=1,2,\cdots;\quad j=1,2,\cdots \tag{7.130}$$

由于 $\beta$ 和 $\zeta$ 大都在 4～20 之间，所以式(7.129)和式(7.130)中的 $\Gamma(\cdot)$近似为 1。这样有 $\bar{\sigma}_{i,0}^{\mathrm{L}}\approx\tilde{\sigma}_{i,0}^{\mathrm{L}}$及 $\bar{\sigma}_{j,i}^{\mathrm{H}}\approx\tilde{\sigma}_{j,i}^{\mathrm{H}}$。

对于受纵向拉伸的混杂复合材料，在形成具有 $k$ 根已断的 LE 纤维的某个桥式裂纹的各种可能中，占优势的破坏过程是：混杂复合材料中的某一“最弱”LE 纤维首先发生断裂，然后，与断口相邻的受较严重过应力作用的 LE 纤维将逐根发生断裂。在这种占优势的破坏过程中，当含$(k-1)$根已断 LE 纤维的桥式裂纹紧邻的完好无损的 LE 纤维的破坏概率$(F_{\mathrm{L}}(K_{k-1,0}^{\mathrm{L}}\sigma_{\mathrm{L}}))$(其中，$F_{\mathrm{L}}(K_{k-1,0}^{\mathrm{L}}\sigma_{\mathrm{L}})>F_{\mathrm{L}}(K_{k-2,0}^{\mathrm{L}}\sigma_{\mathrm{L}})>\cdots$)大于或等于此桥式裂纹中受最严重过应力的那根完整的 HE 纤维的破坏概率$(F_{\mathrm{H}}(K_{0,k-1}^{\mathrm{H}}\sigma_{\mathrm{H}}))$(其中，$F_{\mathrm{H}}(K_{0,k-1}^{\mathrm{H}}\sigma_{\mathrm{H}})>F_{\mathrm{H}}(K_{0,k-2}^{\mathrm{H}}\sigma_{\mathrm{H}})>\cdots$，$K_{0,k-1}^{\mathrm{H}}>K_{0,k-2}^{\mathrm{H}}>\cdots$，$\delta_{0,k-1}^{\mathrm{H}}=\delta_{1,k-1}^{\mathrm{H}}>\delta_{1,k-2}^{\mathrm{H}}>\cdots$)时，有

$$\left(\frac{K_{0,k-1}^{\mathrm{H}}\sigma_{\mathrm{H}}}{\tilde{\sigma}_{0,k-1}^{\mathrm{H}}}\right)^{\zeta}\leqslant\left(\frac{K_{k-1,0}^{\mathrm{L}}\sigma_{\mathrm{L}}}{\tilde{\sigma}_{k-1,0}^{\mathrm{L}}}\right)^{\beta} \tag{7.131}$$

或者如果

$$\sigma_{\mathrm{L}}\leqslant\left\{\left[\frac{\bar{\sigma}_{0,k-1}^{\mathrm{H}}}{K_{0,k-1}^{\mathrm{H}}R}\right]^{\zeta}\Big/\left[\frac{\bar{\sigma}_{k-1,0}^{\mathrm{L}}}{K_{k-1,0}^{\mathrm{L}}}\right]^{\beta}\right\}^{1/(\zeta-\beta)}=\dot{\sigma}_{k-1} \tag{7.132}$$

则认为这根 LE 纤维将比那根 HE 纤维先发生破坏。这样，形成某个包含 $k$ 根已断 LE 纤维的桥式裂纹的概率为

$$P_{\mathrm{L}}(k;\sigma)=H_0(\sigma_{\mathrm{L}})H_1(\sigma_{\mathrm{L}})\cdots H_{k-1}(\sigma_{\mathrm{L}})=2^{k-2}F_{\mathrm{L}}(\sigma_{\mathrm{L}})\times$$

$$\left\{\prod_{i=1}^{k-2}F_{\mathrm{L}}(K_{i,0}^{\mathrm{L}}\sigma_{\mathrm{L}})[1-F_{\mathrm{L}}(K_{i,0}^{\mathrm{L}}\sigma_{\mathrm{L}})]\right\}F_{\mathrm{L}}(K_{k-1,0}^{\mathrm{L}}\sigma_{\mathrm{L}})[2-F_{\mathrm{L}}(K_{k-1,0}^{\mathrm{L}}\sigma_{\mathrm{L}})] \tag{7.133}$$

其中

$$H_0(\sigma_{\mathrm{L}})=F_{\mathrm{L}}(\sigma_{\mathrm{L}})=1-\exp(-\alpha\delta_{0,0}^{\mathrm{L}}\sigma_{\mathrm{L}}^{\beta})$$

是混杂复合材料中某根 LE 纤维的破坏概率；

$$H_i(\sigma_{\mathrm{L}})=2F_{\mathrm{L}}(K_{i,0}^{\mathrm{L}}\sigma_{\mathrm{L}})[1-F_{\mathrm{L}}(K_{i,0}^{\mathrm{L}}\sigma_{\mathrm{L}})]\quad(i=1,2,\cdots,k-2)$$

为 $i$ 根 LE 纤维断裂后，邻近的两根受过应力的 LE 纤维恰好 1 根断裂的概率；而

$$H_{k-1}(\sigma_{\mathrm{L}})=1-[1-F_{\mathrm{L}}(K_{k-1,0}^{\mathrm{L}}\sigma_{\mathrm{L}})]^2=F_{\mathrm{L}}(K_{k-1,0}^{\mathrm{L}}\sigma_{\mathrm{L}})[2-F_{\mathrm{L}}(K_{k-1,0}^{\mathrm{L}}\sigma_{\mathrm{L}})]$$

为$(k-1)$根 LE 纤维断裂后相邻 2 根过应力 LE 纤维至少 1 根断裂的概率。

当 $F_{\mathrm{H}}(K_{0,k}^{\mathrm{H}}\sigma_{\mathrm{H}})>F_{\mathrm{L}}(K_{k,0}^{\mathrm{L}}\sigma_{\mathrm{L}})$时，或者 $F_{\mathrm{H}}(K_{0,k+1}^{\mathrm{H}}\sigma_{\mathrm{H}})>F_{\mathrm{L}}(K_{k+1,0}^{\mathrm{L}}\sigma_{\mathrm{L}})$，即

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{\mathrm{L}}>\left[\left(\frac{\bar{\sigma}_{0,k}^{\mathrm{H}}}{K_{0,k}^{\mathrm{H}}R}\right)^{\zeta}\Big/\left(\frac{\bar{\sigma}_{k,0}^{\mathrm{L}}}{K_{k,0}^{\mathrm{L}}}\right)^{\beta}\right]^{1/(\zeta-\beta)}=\dot{\sigma}_k,\quad\zeta\neq\beta\\&\text{或 }\sigma_{\mathrm{L}}>\left[\left(\frac{\bar{\sigma}_{0,k+1}^{\mathrm{H}}}{K_{0,k+1}^{\mathrm{H}}R}\right)^{\zeta}\Big/\left(\frac{\bar{\sigma}_{k+1,0}^{\mathrm{L}}}{K_{k+1,0}^{\mathrm{L}}}\right)^{\beta}\right]^{1/(\zeta-\beta)}=\dot{\sigma}_{k+1},\quad\zeta\neq\beta\end{aligned}\right\} \tag{7.134}$$

含有 $k$ 根已断 LE 纤维的桥式裂纹中的 HE 纤维的破坏概率将大于桥式裂纹最邻近的那根 LE 纤维的破坏概率，这种桥式裂纹就形成了所谓的**随机亚临界核**。因此，当远场 LE 纤维应力 $\sigma_{\mathrm{L}}$ 满足

$$\dot{\sigma}_k<\sigma_{\mathrm{L}}\leqslant\dot{\sigma}_{k-1}\text{ 或 }\dot{\sigma}_{k+1}<\sigma_{\mathrm{L}}\leqslant\dot{\sigma}_{k-1} \tag{7.135}$$

的条件时，在混杂复合材料中将形成一些随机亚临界核，核中含有 $k$ 根相继断裂的 LE 纤维，这些 LE 纤维先于任一 HE 纤维发生断裂。

整个混杂复合材料试样中最多可能形成的随机亚临界核的个数为

$$m_{\mathrm{L}}=\mathrm{Int}\left[\frac{L(N/2)}{(k\delta_{k-1,0}^{\mathrm{L}})}\right]\text{或 }m_{\mathrm{L}}=\mathrm{Int}\left[\frac{L(N/2)}{(k+1)\delta_{k-1,0}^{\mathrm{L}}}\right] \tag{7.136}$$

其中的符号 Int 表示取整数。

令 $G_{\mathrm{L}}(\sigma_{\mathrm{L}})$为混杂复合材料中至少出现一个随机亚临界核的概率(即混杂复合材料发生第一破坏的概率)。根据随机临界核的统计独立性，$G_{\mathrm{L}}(\sigma_{\mathrm{L}})$可由下式表达

$$G_{\mathrm{L}}(\sigma_{\mathrm{L}})=1-[1-P_{\mathrm{L}}(k;\sigma_{\mathrm{L}})]^{m_{\mathrm{L}}} \tag{7.137}$$

为了确定混杂复合材料发生第一破坏时的远场纤维应力 $\sigma_{\mathrm{Lu}}$，将式(7.133)和式(7.136)代入式(7.137)，并令 $G_{\mathrm{L}}(\sigma_{\mathrm{L}})=G_0(0\leqslant G_0\leqslant 1$，通常取 $G_0=0.5$)表征混杂复合材料的第一破坏。由此可得混杂复合材料第一破坏准则

$$\left.\begin{aligned}&1-[1-P_{\mathrm{L}}(k;\sigma_{\mathrm{L}})]^{m_{\mathrm{L}}}=G_0\\&\dot{\sigma}_k<\sigma_{\mathrm{L}}\leqslant\dot{\sigma}_{k-1}\text{ 或 }\dot{\sigma}_{k+1}<\sigma_{\mathrm{L}}\leqslant\dot{\sigma}_{k-1}\end{aligned}\right\} \tag{7.138}$$

第一破坏发生后，混杂复合材料仍能有效地承载，在加载过程中，承受过应力的 HE 纤维也开始发生断裂。由于确定混杂复合材料最终破坏概率的通用表达式相当困难，为此，我们仅给出 $k=4$ 时，过应力的 HE 纤维的破坏过程的概率描述，

至于其他情形，可由类似的方法导出。设承受最大过应力 $K_{0,4}^{H}\sigma_H$ 作用的 HE 纤维的破坏概率为

$$F_H(K_{0,4}^{H}\sigma_H) = 1 - \exp[-\lambda\delta_{0,4}^{H}(K_{0,4}^{H}\sigma_H)^{\xi}] \tag{7.139}$$

当这根 HE 纤维断裂后，紧邻的 HE 纤维比原先受到更大的过应力，由此它比其他过应力纤维更易断裂。如果

$$K_{1,4}^{H}\sigma_H \leqslant \bar{\sigma}_{1,4}^{H} \quad 或 \quad \sigma_H \leqslant \bar{\sigma}_{1,4}^{H}/K_{1,4}^{H}$$

两根紧邻已断的 HE 纤维中的至少 1 根 HE 纤维断裂的概率为

$$1 - [1 - F_H(K_{1,4}^{H}\sigma_H)]^2 = F_H(K_{1,4}^{H}\sigma_H)[2 - F_H(K_{1,4}^{H}\sigma_H)]$$

这样，形成至少 2 根(或 3 根)相邻的 HE 纤维断裂的概率由以上两式相乘得到，即

$$P_H(3;\sigma_H) = F_H(K_{0,4}^{H}\sigma_H)F_H(K_{1,4}^{H}\sigma_H)[2 - F_H(K_{1,4}^{H}\sigma_H)] \tag{7.140}$$

为了方便起见，这里假定 3 根 HE 纤维已发生了断裂。

现在，如果紧邻包含有 4 根已断的 LE 纤维和 3 根已断的 HE 纤维的断裂核的那根 HE 纤维的破坏概率超过 $1-e^{-1}\approx 0.632$，由式(7.130)可得

$$K_{3,4}^{H}\sigma_H > \bar{\sigma}_{3,4}^{H} \quad 即 \quad \sigma_H > \bar{\sigma}_{3,4}^{H}/K_{3,4}^{H}$$

或者说，它的过应力大于其统计平均强度，断裂必然发生。而后，由于应力集中严重，裂纹核邻近的 LE 纤维和 HE 纤维势必发生断裂，从而导致裂纹核的失稳扩展。我们称此裂纹核为**随机临界核**。因此，当施加应力 $\sigma_H$ 满足

$$\bar{\sigma}_{3,4}^{H}/K_{3,4}^{H} < \sigma_H \leqslant \bar{\sigma}_{1,4}^{H}/K_{1,4}^{H}$$

的条件时，形成一个包含有 7 根断裂纤维的随机临界核的概率为

$$P(7;\sigma_H) = P_L\left(4;\frac{\sigma_H}{R}\right)P_H(3;\sigma_H) \tag{7.141}$$

定义混杂复合材料的最终破坏为在试样中至少一个裂纹核形成随机临界核。令 $G(\sigma_H)$ 为混杂复合材料的最终破坏概率，则有

$$G(\sigma_H) = 1 - [1 - P(7;\sigma_H)]^{m_H} \tag{7.142}$$

式中，$m_H$ 为整个混杂复合材料试样中最多可能形成的随机临界核的个数，通过下式计算得到

$$m_H = \mathrm{Int}\left[\frac{L(N/2)}{(4\delta_{1,4}^{H})}\right] \tag{7.143}$$

类同第一破坏，混杂复合材料最终破坏的破坏准则为

$$\left.\begin{aligned} &1 - [1 - P(7;\sigma_H)]^{m_H} = G_0 \\ &\frac{\bar{\sigma}_{3,4}^{H}}{K_{3,4}^{H}} < \sigma_H \leqslant \frac{\bar{\sigma}_{1,4}^{H}}{K_{1,4}^{H}} \end{aligned}\right\} \tag{7.144}$$

考虑层内混杂复合材料试样为玻璃纤维和碳纤维混杂，基体为环氧。两种纤维直径假定相同 $d_f\approx 10\mu m$；$V_f$ 取 0.6。LE 碳纤维(Ⅱ型高强)和 HE 玻璃纤维的基本数据为：对于碳纤维，$\alpha=0.055$，$\beta=7.0$，$E_{LE}=245GPa$；对于玻璃纤维有 $\lambda=0.077$，

$\zeta=8.2$ 及 $E_{HE}=73GPa$。基体环氧为：$E_m=3.45GPa$，$G_m=1.26GPa$。假定混杂复合材料试样的长和宽各为 $L=100mm$，$W=10mm$。这样 LE 纤维和 HE 纤维各有 $\frac{1}{2}N=\left(\frac{1}{2}W\right)/d\approx 417$ 根。

应力集中因子取自 7.3.3 中的计算结果。令 $G_0=0.5$，由式(7.138)可得到层内混杂复合材料发生第一破坏时碳纤维的强度($\sigma_{Lu}$)和无量纲界面剪切强度($\bar{\tau}_s$)的关系。由式(7.144)可得层内混杂复合材料发生最终破坏时玻璃纤维的强度($\sigma_{Hu}$)和无量纲界面剪切强度($\bar{\tau}_s$)的关系。其中，第一破坏时亚临界核中 LE 纤维临界断裂数($k$)和最终破坏时临界核中的 HE 纤维临界断裂数均与 $\tau_s$ 有关，即当 $0.05\leqslant\bar{\tau}_s\leqslant 0.3$ 时，$k=10\sim 15$，当 $0.3<\bar{\tau}_s\leqslant 0.4$ 时，$k=7\sim 9$，当 $\bar{\tau}_s\geqslant 0.4$ 时，$k=4\sim 6$。而最终破坏除了当 $\bar{\tau}_s\geqslant 0.58$，即 $k=4$ 时，桥式裂纹中间接连有两根相邻的 HE 纤维发生断裂才达到发生最终破坏的临界核外，其余情况由于发生第一破坏时桥式裂纹中的 LE 纤维断裂数比较大，均当仅有 1 根 HE 纤维发生断裂后亚临界核扩展为临界核即导致最终破坏。

为了确定混杂效应，尚需求出单一碳纤维复合材料的统计拉伸强度。此类复合材料发生破坏时碳纤维的强度($\sigma_{Lu}$)与无量纲界面剪切强度($\bar{\tau}_s$)的关系可取自 4.5 节的结果。

假定纤维的应力-应变满足线弹性条件，因此，由

$$\varepsilon_{Lu}=\sigma_{Lu}/E_{LE},\quad \varepsilon_{Hu}=\sigma_{Hu}/E_{HE},\quad \varepsilon_{cu}=\sigma_{fu}/E_{LE} \tag{7.145}$$

可以分别计算出层内混杂复合材料第一破坏应变($\varepsilon_{Lu}$)，最终破坏应变($\varepsilon_{Hu}$)及单一碳纤维增强复合材料的破坏应变($\varepsilon_{cu}$)，其结果示于图 7.36。

由图 7.36 便可计算出层内混杂复合材料的**混杂效应**。这里，定义混杂效应为层内混杂复合材料发生第一破坏时的破坏应变 $\varepsilon_{Lu}$ 相对于单一纤维增强复合材料发生破坏时的应变 $\varepsilon_{cu}$ 的增加率，即

$$R_\varepsilon=\frac{\varepsilon_{Lu}-\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu}}\times 100\% \tag{7.146}$$

图 7.37 示出了混杂效应 $R_\varepsilon$ 与 $\bar{\tau}_s$ 的关系。从图中可见，首先 $R_\varepsilon$ 随 $\bar{\tau}_s$ 的增加而增加，达到峰值后随 $\bar{\tau}_s$ 的增加而像波浪形缓慢减小，然后略微增加。这表明，关于混杂效应，同样存在一个最佳的界面剪切强度，与之对应的混杂效应可达到最大值。对于本例，对应于最大的 $R_\varepsilon$，$\bar{\tau}_s$ 值为 0.14。作为比较，图 7.37 也示出了由 Bunsell 和 Harris(1974)给出的实验结果。对比可见，这些结果与实验结果较为接近。值得一提的是，上述的计算结果尚未计及固化残余热应变(约 10%)，若考虑这一因素，这些结果则与实验结果相当吻合。这表明，上述所建立的模型、计算方法和结果是合理和正确的。

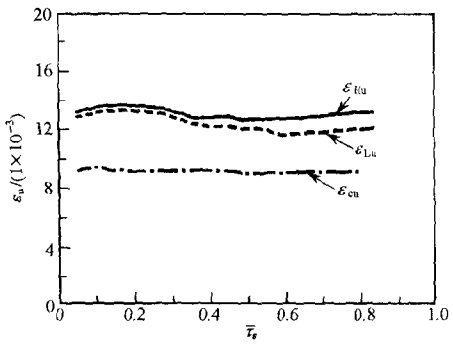



图 7.36 $\varepsilon_{Lu}$，$\varepsilon_{Hu}$和 $\varepsilon_{cu}$与 $\bar{\tau}_s$ 的关系

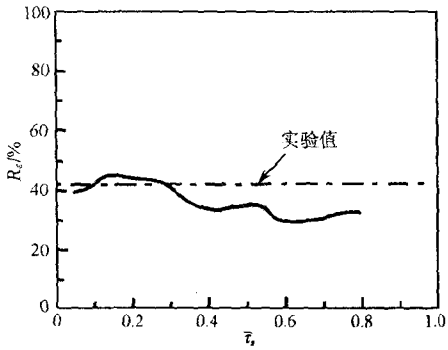



图 7.37 混杂效应 $R_\varepsilon$ 与 $\bar{\tau}_s$ 的关系

分析结果表明，混杂复合材料中的 LE 纤维的破坏应变（第一破坏应变）比单一 LE 纤维增强复合材料的破坏应变高，这是由于对于具有相同的纤维断裂数时，混杂复合材料中与断裂核邻近的 LE 纤维的应力集中因子和无效长度比单一 LE 纤维增强复合材料的都有所降低。此外，HE 纤维能有效阻止裂纹的横向扩展，在细观力学水平上起到止裂的作用。这表明混杂复合材料的微观力学特性及破坏机制与单一纤维增强复合材料有较大区别。因此，其破坏机制是不同的，显现出明显的混杂效应。

层内混杂复合材料的最终拉伸破坏应变比单一 HE 纤维增强复合材料的拉伸破坏应变低。这是因为，混杂复合材料的最终拉伸破坏取决于 HE 纤维的断裂，而随着 LE 纤维的逐步断裂，HE 纤维所受的应力集中和无效长度也逐步增加，因此混杂复合材料将在较低的应变下发生最终破坏。可见，混杂复合材料不可避免地要损失 HE 纤维的部分强度，从而获得混杂效应。

有关层内混杂复合材料在弹性情形下拉伸破坏的细观统计分析，读者可参阅曾庆敦在 1995 年发表的文章。

### 7.5.4 层间混杂复合材料的破坏机制及协同效应

1. Fukunaga、Chou 和 Fukuda 理论

Fukunaga、Chou 和 Fukuda（1989）将 Harlow 和 Phoenix（1978）的统计理论进行推广，分析了层间混杂叠层复合材料的最终拉伸强度，研究了层板强度的分散性、相对纤维体积分数、复合材料尺寸及叠层次序对混杂叠层最终强度的影响。在所建立的模型中，也把叠层看作为一系列排列的 $m$ 个短链节，每节的长度为 $\delta$，复合材料的总长度为 $L=m\delta$，仅考虑由 4 块 LE 单层和 HE 单层所组成的叠层板。图 7.38 示出了

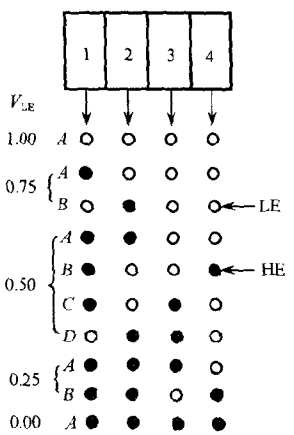



图 7.38 叠层的铺叠次序

由 LE 纤维和 HE 纤维单层铺叠而成的叠层板的铺叠次序。对于各种单层断裂构造的应变集中因子，用特征矢量展开法(Fukunaga，Chou and Fukuda 1984)进行计算。

基于由层板断裂而引起的应力重新分布的知识进行强度分析。假定每一单层均服从两参数韦布尔概率分布函数，全部层板均发生破坏定义为叠层的最终破坏。LE 层和 HE 层的最终应变的累积分布函数分别用 $F_{LE}(\varepsilon)$和 $F_{HE}(\varepsilon)$来表示，它们的具体表达式由式(7.100)给出。

图 7.39 给出了 4 层混杂复合材料的破坏模式的示意图，其中"○"和"×"分别表示完整层和断裂层，由此可求出 1，2，3 和 4 块层板断裂的概率。

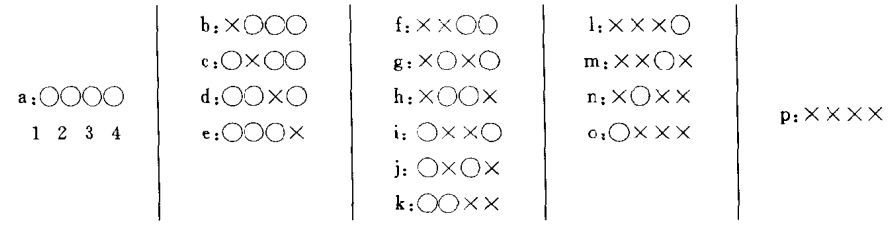



图 7.39 4 层混杂复合材料破坏模式

Fukunaga 等考虑了 75 种可能的破坏次序，并把它们归为 8 种不同的类型，从中划分出每一类型中的不同破坏次序的数目。下面给出每一类型中的典型破坏次序及相应的破坏概率：

类型 I 1～24 号

编号 1：a→b→f→l→p

$$F(x)[F(K_{1,2}x)-F(x)][F(K_{12,3}x)-F(K_{1,3}x)]\times[F(K_{123,4}x)-F(K_{12,4}x)]$$

类型 II 25～36 号

编号 25：a→b→l→p

$$F(x)[F(K_{1,2}x)-F(x)][F(K_{1,3}x)-F(x)]\times[F(K_{123,4}x)-F(K_{1,4}x)]$$

类型 III 37～48 号

编号 37：a→b→f→p

$$F(x)[F(K_{1,2}x)-F(x)][F(K_{12,3}x)-F(K_{1,3}x)]\times[F(K_{12,4}x)-F(K_{1,4}x)]$$

类型 IV 49～60 号

编号 49：a→f→l→p

$$F^2(x)[F(K_{12,3}x)-F(x)][F(K_{123,4}x)-F(K_{12,4}x)]$$

类型 V 61～64 号

编号 61：a→b→p

$$F(x)[F(K_{1,2}x)-F(x)][F(K_{1,3}x)-F(x)][F(K_{1,4}x)-F(x)]$$

类型Ⅵ　65～70 号

编号 65：a→f→p

$$F^2(x)[F(K_{12,3}x)-F(x)][F(K_{12,4}x)-F(x)]$$

类型Ⅶ　71～74 号

编号 71：a→l→p

$$F^3(x)[F(K_{123,4}x)-F(x)]$$

类型Ⅷ　75 号

编号 75：a→p

$$F^4(x)$$

上述表达式中的 $F(x)$代表 LE 层的 $F_{LE}(\varepsilon)$和 HE 层的 $F_{HE}(\varepsilon)$；$K_{ij,k}$表示第 $i$ 和第 $j$ 层破坏后第 $k$ 层的应变集中因子。

对于长为 $\delta$ 的叠层段，用应变表示的累积分布函数 $G(\varepsilon)$可由 1～75 号破坏次序的破坏概率相加而得到。当给出 $G(\varepsilon)$时，关于平均应力的累积分布函数 $G(\sigma)$就可由 $\sigma=E_c\varepsilon$ 的关系求出，其中 $E_c$ 为混杂叠层的有效纵向杨氏模量。最后，长为 $L=m\delta$ 的混杂复合材料的累积分布函数 $H_m(\sigma)$，由最弱环理论给出如下

$$H_m(\sigma) = 1 - [1 - G(\sigma)]^m \tag{7.147}$$

考虑两种极限情形。在非混杂复合材料中，$F_{LE}(\varepsilon)=F_{HE}(\varepsilon)$，如果使用应变重新分布的局部荷载分担（平均荷载分担）法则，上述结果可以化为 Harlow 和 Phoenix 的结果。值得注意的另一种情形是高破坏概率的情况，对于这一情形，第一板破坏可能引发叠层的完全破坏。对于叠层段的第一板破坏强度的累积分布函数便可用 $\sigma$ 替换式(7.102)中的 $\varepsilon$ 来获得。Fukunaga 等指出，在韦布尔概率纸上，$G(\sigma)$可以用下式表示

$$\ln\{-\ln[1 - G(\sigma)]\} = \beta\ln\frac{\sigma}{\sigma_0} + \beta\ln\frac{n}{n_{LE} + n_{HE}R} + \ln(n_{LE} + n_{HE}R^{\beta}) \tag{7.148}$$

式中，$n=n_{LE}+n_{HE}$；$R=E_{HE}/E_{LE}$；$\sigma_0$ 为尺度参数。

对于 $\beta=\beta_{LE}=\beta_{HE}$，$E_{HE}/E_{LE}=1/3$，$\varepsilon^*_{HE}/\varepsilon^*_{LE}=3.0$，可以求出混杂叠层最终强度的数值结果。图 7.40 示出了 $V_{LE}=0.5$ 及 4 种不同叠层构造的平均强度，由图可见，LE 层聚集在一起的混杂叠层的强度（图 7.40 中的情形 $A$ 和情形 $B$）小于 LE 层较均匀地分散于 HE 层中的混杂叠层的强度。很明显，情形 $A$ 和情形 $B$ 比情形 $C$ 和情形 $D$ 具有较高的应力集中因子。

图 7.41 示出了 $m=10^2$ 时的平均强度随 $V_{LE}$的变化趋势。点 $A(A')$和点 $D(D')$分别表示单一 HE 纤维复合材料和单一 LE 纤维复合材料的强度；线 $BD(B'D')$表示 LE 纤维发生破坏时混杂复合材料中的应力；线 $AC(A'C')$表示假定 LE 纤维不

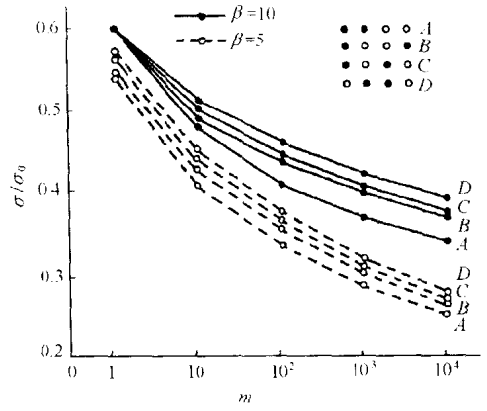



图 7.40　叠层次序对平均强度的影响

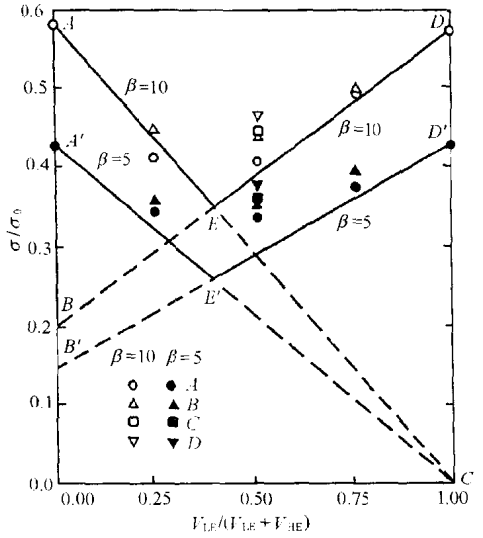



图 7.41　平均强度与相对纤维体积分数的关系

再承担荷载时混杂复合材料中的应力。根据混合法则，线 $AED(A'E'D')$ 表明混杂复合材料的最终破坏强度。在混合法则以上的强度的增加被认为是混杂效应。计算结果表明，混杂复合材料的强度低于单一 LE(HE)纤维复合材料的强度。这一发现与混杂叠层强度的实验测试相符。从图 7.41 中还可以看到其他一些因素对强度的影响，这些因素是单层强度的分散性、LE 纤维的相对体积分数及层板铺叠次序。$\beta=10$ 时的平均强度大于 $\beta=5$ 时的平均强度，而 $\beta=5$ 时的混杂效应大于 $\beta=10$ 时的混杂效应；强度随层板铺叠次序和 LE 纤维的相对体积分数而改变。强度值按类型 $A$，$B$，$C$ 和 $D$ 叠层次序由低到高。我们还可以看到，当 $V_{LE}=0.5$ 时混杂效应最大。

Fukunaga 等的统计分析得出如下结论：①对较大的形状参数值，混杂复合材料的强度较大，而对较小的形状参数值，混杂效应较大。②关于统计最终破坏强度的混杂效应，当 $V_{LE}=0.5$ 时最显著。③强度的大小和分散性随混杂复合材料的长度而改变。④由于层板断裂导致的应力重新分布的差别，强度也受层板铺叠次序的影响。对于某一给定的相对纤维体积分数，LE 层较均匀地分散于 HE 层中的混杂叠层的强度高于 LE 层聚集在一起的混杂叠层的强度。

2. 第一破坏的统计分析

曾庆敦等(1993)将随机扩大临界核统计理论(4.5 节)进行了推广，对图 7.16 所示的 $m$ 玻璃/碳/$m$ 玻璃混杂叠层复合材料的拉伸第一破坏问题进行了统计分析。

混杂复合材料在拉伸荷载作用下，由于 LE 分量的破坏应变比 HE 分量的破坏应变低得多，故中间的 LE 碳纤维层将先出现破坏。但其裂纹扩展受到两边的 HE 玻璃纤维层的抑制，裂纹不容易扩展。关于 LE 纤维的无效长度(拔出长度)($\delta_j^L$)和应力集中因子($K_j^L$)(表 7.5)均比单一碳纤维层小。设在层间混杂复合材料中拔出 $i$ 根碳纤维的拔出长度为 $\delta_i^L/2$，按极限平衡有

$$2\times\frac{\delta_i^L}{2}h\tau_s+2\times\frac{\delta_i^L}{2}id\tau_s\approx i\sigma_L A_f \tag{7.149}$$

因此

$$\delta_i^L\approx\frac{i\sigma_L}{(1+id/h)\tau_s}\frac{A_f}{hd}d\approx\frac{i\sigma_L}{(1+i)\tau_s}V_f d\approx\frac{id_f}{(1+i)\tau_s}\sigma_L \tag{7.150}$$

其中的 $\sigma_L$ 为 LE 纤维的平均应力。若将混杂复合材料的第一破坏视为 LE 层中至少出现一个临界核事件。于是，由式(4.114)～(4.118)，有

$$\left.\begin{aligned}&P_L(k,\sigma_L)=2^{k-2}F_L(\sigma_L)\times\left\{\prod_{i=1}^{k-2}F_L(K_i^L\sigma_L)[1-F_L(K_i^L\sigma_L)]\right\}\times\\&F_L(K_{k-1}^L\sigma_L)[2-F_L(K_{k-1}^L\sigma_L)]\\&1-[1-P_L(k,\sigma_L)]^{m_L}=G_0\\&\bar\sigma_k^L/(K_k^L)^B<\sigma_L\leqslant\bar\sigma_{k-1}^L/(K_{k-1}^L)^B\quad\text{或}\\&\qquad\bar\sigma_{k+1}^L/(K_{k+1}^L)^B<\sigma_L\leqslant\bar\sigma_{k-1}^L/(K_{k-1}^L)^B\end{aligned}\right\} \tag{7.151}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&F_L(K_i^L\sigma_L)=1-\exp[-\alpha\delta_i^L(K_i^L\sigma_L)^\beta],B=\frac{\beta}{\beta+1}\\&\bar\sigma_i^L=\left(\frac{i}{i+1}\frac{d_f\alpha}{\tau_s}\right)^{-1/(\beta+1)},\\&m_L=\mathrm{Int}\left(\frac{LN}{k\delta_{k-1}^L}\right)\quad\text{或}\quad m_L=\mathrm{Int}\left[\frac{LN}{(k+1)\delta_{k-1}^L}\right]\end{aligned}\right\} \tag{7.152}$$

由此可算出第一破坏时的应力 $\sigma_{Lu}$和临界裂纹长度 $k$。

为了从统计的观点研究混杂效应，还需求出单一纤维(譬如 LE 纤维)复合材料单层的统计强度或断裂应变。其破坏准则可按 4.5 节的随机扩大临界核理论或

按前述类似的方法求得

$$\left.\begin{aligned} &P(k,\sigma_f)=2^{k-2}F(\sigma_f)\times\left\{\prod_{i=1}^{k-2}F(K_i\sigma_f)[1-F(K_i\sigma_f)]\right\}\times\\ &\quad F(K_{k-1}\sigma_f)[2-F(K_{k-1}\sigma_f)]\\ &1-[1-P(k,\sigma_f)]^m=G_0\\ &\bar{\sigma}_k/(K_k)^B<\sigma_f\leqslant\bar{\sigma}_{k-1}/(K_{k-1})^B \quad 或\\ &\quad \bar{\sigma}_{k+1}/(K_{k+1})^B<\sigma_f\leqslant\bar{\sigma}_{k-1}/(K_{k-1})^B \end{aligned}\right\} \tag{7.153}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &F(K_i\sigma_f)=1-\exp[-\alpha\delta_i(K_i\sigma_f)^\beta],\quad \delta_i=\frac{id_f\sigma_f}{\tau_s},\quad B=\frac{\beta}{\beta+1}\\ &\bar{\sigma}_i=\left(\frac{id_f\alpha}{\tau_s}\right)^{-1/(\beta+1)},\quad m=\mathrm{Int}\left(\frac{LN}{k\delta_{k-1}}\right)\quad 或\quad m=\mathrm{Int}\left[\frac{LN}{(k+1)\delta_{k-1}}\right] \end{aligned}\right\} \tag{7.154}$$

这里的应力集中因子($K_i$)可取自表 2.1 或表 2.5。

采用 7.5.3 中Ⅱ型高强碳纤维、基体及试样尺寸的基本数据，基体的剪切强度 $\tau_s$ 取为 25 MPa。令 $G_0=0.5$，由式(7.151)～(7.154)求得

GRP/CFRP/GRP：

$\sigma_{Lu}=2.938\ 5\text{GPa}$，　$k=10$；　　$\varepsilon_{Lu}=\sigma_{Lu}/E_{LE}\approx 0.012\ 0$。

3GRP/CFRP/3GRP：

$\sigma_{Lu}=3.198\ 8\text{GPa}$，　$k=11$；　　$\varepsilon_{Lu}=\sigma_{Lu}/E_{LE}\approx 0.013\ 1$。

CFRP：

$\sigma_{cu}=1.940\ 3\text{GPa}$，　$k=4$；　　$\varepsilon_{cu}=\sigma_{cu}/E_{LE}\approx 0.007\ 9$。

混杂效应仍按式(7.146)进行计算，结果见表 7.7，作为比较，表中还列出了 Manders 和 Bader(1981)的实验结果。

**表 7.7　理论和实验结果的比较**

| 混杂类型 | | $\varepsilon_{cu}$ | $\varepsilon_{Lu}$ | $R_\varepsilon$/% |
|---|---|---|---|---|
| 类型Ⅰ：GRP/CFRP/GRP | 理论结果 | 0.007 9 | 0.012 0 | 51.9(+10) |
| | 实验结果 | 0.007 7 | 0.012 5 | 62.3 |
| 类型Ⅱ：3GRP/CFRP/3GRP | 理论结果 | 0.007 9 | 0.013 1 | 65.8(+10) |
| | 实验结果 | 0.007 7 | 0.014 8 | 92.2 |

必须指出，表 7.7 中的实验结果为总的混杂效应(约 10%是由固化热效应产生的)，而理论结果仅是混杂效应的非热(力学)部分。如计及热效应(即加上圆括号内的数值)，对于类型Ⅰ，理论值与实验结果吻合；对于类型Ⅱ，因为所用的应力集中因子是近似值(套用类型Ⅰ的公式算出的)，所以有 18%的偏差。结果还表明，混杂效应(这里也属叠层效应)或第一破坏应变随 HE 层数的增加而增加，这个情形

也符合实验观察。

上述的计算结果表明，层间混杂复合材料 LE 层的纤维临界断裂数比单一 LE 纤维复合材料单层的大 2～3 倍，这样，混杂复合材料 LE 层中的裂纹扩展就在较高的应力或应变水平下才能发生。由于中间的 LE 层受到 HE 层的约束，故由 LE 纤维断裂引起的应力扰动因此被局部化，HE 纤维(层)的行为像裂纹阻止者，并在细观力学水平上起着“增韧”LE 纤维(层)的作用。从表 2.1，表 7.5 及式(7.150)和式(7.154)中还可看到，混杂复合材料中的应力集中和逐渐扩大的无效长度均比单一纤维复合材料单层的小，就是说，混杂复合材料中 LE 分量对固有缺陷的敏感性有较大程度的降低，这就使 LE 分量有可能承受较大的拉伸荷载。因此 LE 分量就可能出现多级破坏或产生多重断裂现象，这种细观损伤机制有别于单一纤维复合材料。

3. 最终破坏的统计分析

在受轴向拉伸的层间混杂复合材料中(图 7.17)，由于 LE 分量和 HE 分量之间的应变差异，当第一破坏发生后，HE 分量仍能承受荷载作用。此类复合材料的最终破坏通常始于受应力集中较大的 HE 纤维的断裂。在弹性情形下，其最终破坏的统计分析完全类似于 5.8.3 中关于正交叠层板最终破坏的统计分析，不同之处仅是 HE 纤维的应力集中因子及其性能。

采用表 7.6 中给出的 HE 纤维的应力集中因子的计算结果，并采用曾庆敦等(1994)给出的基本数据，求得的结果如下

$$\underline{\text{GRP/CFRP/GRP}}:$$

$\sigma_{\mathrm{Hu}}=1.0597\ \mathrm{GPa}$，　$k_1=4$ 或 5；　　$\varepsilon_{\mathrm{Hu}}=\sigma_{\mathrm{Hu}}/E_{\mathrm{HE}}\approx 0.0147$

$$\underline{\text{3GRP/CFRP/3GR}}$$

$\sigma_{\mathrm{Hu}}=1.3413\ \mathrm{GPa}$，　$k_1=5$，　$k_2=2$，　$k_3=0$；　　$\varepsilon_{\mathrm{Hu}}=\sigma_{\mathrm{Hu}}/E_{\mathrm{HE}}\approx 0.0186$。

Manders 和 Bader (1981)的实验结果是：4GRP/CFRP/4GRP 和 3GRP/3CFRP/3GR 的最终破坏应变分别为 0.019 和 0.021。可见，理论值略低于实验结果。其原因也许是应力重新分布计算模型及统计模型的近似性所引起的。此外，在实验中已观察到层间脱层发生，显然，此情形可以大大降低 HE 纤维的应力集中(见 7.3.3)，从而可提高叠层的最终破坏应变。这个问题将在下面考虑。

4. 层间界面破坏对最终强度的影响

对于图 7.18(a)所示的层间混杂复合材料，第一破坏发生后，在 LE 层和 HE 层之间也发生了层间界面破坏(图 7.18(b))。破坏区域的大小与界面剪切强度及混杂比有关。因此类叠层板的构造与$[0_n/90_m]_s$正交叠层板类似，故其最终破坏可遵循 5.8.3 中的步骤进行统计分析。根据图 5.33 所示的模型进行计算，HE 纤维的拔出长度的表达式为

$$\delta_{i,j}^{\mathrm{H}}=\left[\left(\sum_{q=1}^{i-1}k_q+j\right)d_{\mathrm{f}}/(k_1+i)\right]\frac{\sigma_{\mathrm{H}}}{\tau_{\mathrm{s}}},$$

$$i = 1,2,\cdots,n-1; \qquad j = 1,2,\cdots \tag{7.155}$$

对于表层 HE 单层($i=n$),有

$$\delta_{n,j}^{\mathrm{H}} = \left[\left(\sum_{q=1}^{i-1} k_q + j\right) d_{\mathrm{f}} \Big/ \left(k_1 + n - \frac{j}{2}\right)\right] \frac{\sigma_{\mathrm{H}}}{\bar{\tau}_{\mathrm{s}}} \tag{7.156}$$

曾庆敦等(1999)给出了如下公式

$$\tau_{\mathrm{s}} = \sigma_{\mathrm{H}} \sqrt{\frac{V_{\mathrm{f}} G_{\mathrm{m}}}{E_{\mathrm{HE}}}} \bar{\tau}_{\mathrm{s}} \tag{7.157}$$

将上式代入式(7.155)和式(7.156),有

$$\delta_{i,j}^{\mathrm{H}} = \left\{\left(\sum_{q=1}^{i-1} k_q + j\right) d_{\mathrm{f}} / [(k_1 + i)\bar{\tau}_{\mathrm{s}}]\right\} \sqrt{\frac{E_{\mathrm{H}}}{V_{\mathrm{f}} G_{\mathrm{m}}}},$$
$$i = 1,2,\cdots,n-1; \qquad j = 1,2,\cdots, \tag{7.158}$$

$$\delta_{n,j}^{\mathrm{H}} = \left\{\left(\sum_{q=1}^{i-1} k_q + j\right) d_{\mathrm{f}} \Big/ \left[\left(k_1 + n - \frac{j}{2}\right)\bar{\tau}_{\mathrm{s}}\right]\right\} \sqrt{\frac{E_{\mathrm{H}}}{V_{\mathrm{f}} G_{\mathrm{m}}}} \tag{7.159}$$

设长为 $\delta_{i,j}^{\mathrm{H}}$ 的 HE 纤维的强度分布由式(7.117)中的第 2 式给出,因此,其统计平均强度

$$\bar{\sigma}_{i,j}^{\mathrm{H}} = (\lambda \delta_{i,j}^{\mathrm{H}})^{-1/\zeta} \Gamma(1 + 1/\zeta) \approx (\lambda \delta_{i,j}^{\mathrm{H}})^{-1/\zeta} = \bar{\sigma}_{i,j}^{\mathrm{H}} \tag{7.160}$$

根据式(5.143),可写出混杂复合材料最终破坏的概率分布函数为

$$G(\sigma_{\mathrm{H}}) = 1 - [1 - P_1(\sigma_{\mathrm{H}}) P_2(\sigma_{\mathrm{H}}) \cdots P_{n-1}(\sigma_{\mathrm{H}}) P_n(\sigma_{\mathrm{H}})]^2 \tag{7.161}$$

同理可写出第 $i$ 层中至少形成一个随机临界核的概率分布函数为

$$P_i(\sigma_{\mathrm{H}}) = 1 - [1 - H_i(\sigma_{\mathrm{H}})]^{m_i^{\mathrm{H}}}$$

其中

$$H_i(\sigma_{\mathrm{H}}) = 2^{k_i - 2} F_{\mathrm{H}}(K_{i,0}\sigma_{\mathrm{H}}) \left\{\prod_{q=1}^{k_i - 2} F_{\mathrm{H}}(K_{i,j}^{\mathrm{H}}\sigma_{\mathrm{H}})[1 - F_{\mathrm{H}}(K_{i,j}^{\mathrm{H}}\sigma_{\mathrm{f}})]\right\} \times$$
$$F_{\mathrm{H}}(K_{k_i-1,j}^{\mathrm{H}}\sigma_{\mathrm{H}})[2 - F_{\mathrm{H}}(K_{k_i-1,j}^{\mathrm{H}}\sigma_{\mathrm{H}})] \tag{7.162}$$

为第 $i$ 层中发生 $k_i$(临界核中的纤维临界断裂数)根纤维连续断裂的概率,而

$$m_i^{\mathrm{H}} = \mathrm{Int}\left[\frac{LN}{k_i \delta_{i,k_i-1}^{\mathrm{H}}}\right] \quad 或 \quad m_i^{\mathrm{H}} = \mathrm{Int}\left[\frac{LN}{(k_i + 1)\delta_{i,k_i-1}^{\mathrm{H}}}\right] \tag{7.163}$$

其中的 $K_{i,j}^{\mathrm{H}}$ 为计及层间界面破坏影响的 HE 纤维的应力集中因子,由图 7.19 和图 7.20 给出。

至此,就可以获得层间混杂复合材料最终破坏的破坏准则

$$\left.\begin{aligned} &1 - [1 - P_1(\sigma_{\mathrm{H}}) P_2(\sigma_{\mathrm{H}}) \cdots P_{n-1}(\sigma_{\mathrm{H}}) P_n(\sigma_{\mathrm{H}})]^2 = G_0 \\ &\bar{\sigma}_{i,k_i}^{\mathrm{H}} / K_{i,k_i}^{\mathrm{H}} < \sigma_{\mathrm{H}} \leqslant \bar{\sigma}_{i,k_i-1}^{\mathrm{H}} / K_{i,k_i-1}^{\mathrm{H}} \quad 或 \\ &\qquad \bar{\sigma}_{i,k_i+1}^{\mathrm{H}} / K_{i,k_i+1}^{\mathrm{H}} < \sigma_{\mathrm{H}} \leqslant \bar{\sigma}_{i,k_i-1}^{\mathrm{H}} / K_{i,k_i-1}^{\mathrm{H}} \\ &\bar{\sigma}_{i-1,0}^{\mathrm{H}} / K_{i-1,0}^{\mathrm{H}} < \sigma_{\mathrm{H}} \leqslant \bar{\sigma}_{i,0}^{\mathrm{H}} / K_{i,0}^{\mathrm{H}} \end{aligned}\right\} \tag{7.164}$$

上式综合反映了界面、纤维及基体等细观结构特性对混杂复合材料最终拉伸

强度 $\sigma_{Hu}$的影响。我们在应力集中因子和无效长度中引入了界面剪切强度效应，借助于统计断裂理论，建立了 $\sigma_{Hu}$与无量纲界面剪切强度($\bar{\tau}_s$)的关系。对于给定尺寸、混杂组分性能和界面剪切强度的混杂复合材料，即可利用上述破坏准则求出 $\sigma_{Hu}$和 HE 各单层中的纤维临界断裂数($k_i$)。

以 GRP/CFRP/GRP(类型Ⅰ)和 3GRP/CFRP/3GRP(类型Ⅱ)碳/玻璃/环氧层间混杂复合材料为例进行计算。关于 HE 纤维(层)及基体的基本数据取自 5.8.3 中，其中 $V_f=0.6$。令 $G_0=0.5$，求得的 $\sigma_{Hu}$随 $\bar{\tau}_s$ 的变化示于图 7.42；表 7.8 列出了 HE 各单层中随机临界核的"尺寸" $k_i$ 随 $\bar{\tau}_s$ 的变化情况。

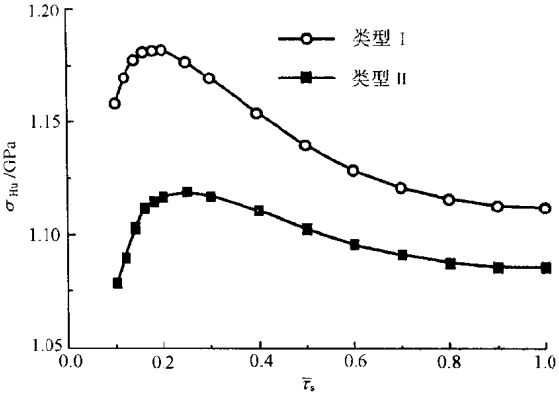



图 7.42　混杂复合材料最终拉伸强度与无量纲界面剪切强度的关系

**表 7.8　随机临界核"尺寸"$k_i$ 与 $\bar{\tau}_s$ 的关系**

| $\bar{\tau}_s$ | | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 叠层类型 | 层序 $i$ | $k_i$ | | | | | | | | | |
| 类型Ⅰ | 1 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 类型Ⅱ | 1 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

从图 7.42 中可以看到，$\sigma_{Hu}$随着 $\bar{\tau}_s$ 的改变而有所不同，对于两种类型的叠层其变化趋势基本相同。当 $\bar{\tau}_s$ 较小时，$\sigma_{Hu}$也较小；随着 $\bar{\tau}_s$ 的增加，$\sigma_{Hu}$也增加，在某处达到最大值，然后随着 $\bar{\tau}_s$ 的增加而缓慢减小，逐渐趋于某一常数。类型Ⅰ和类型Ⅱ的 $\sigma_{Hu}$的最大值分别为 1.119 GPa 和 1.183 GPa，对应的 $\bar{\tau}_s$ 分别为 0.25 和 0.2。将相应的 $\sigma_{Hu}$代入式(7.157)，可求得最佳界面剪切强度值分别是 28.5 MPa 和 24.08

MPa，与环氧树脂基的界面剪切强度 25 MPa 较为接近。

$\bar{\tau}_s$ 对 $\sigma_{Hu}$ 的影响主要体现在：当 $\bar{\tau}_s$ 较小时，应力集中较小，但无效长度较大，无效长度的增加可使纤维的破坏概率增大，导致强度的降低；当 $\bar{\tau}_s$ 较大时，无效长度较小，但纤维应力集中较大，同样使纤维的破坏概率增大，导致强度降低。事实上，当 $\bar{\tau}_s$ 较小时，复合材料的破坏属纵向损伤模式；当 $\bar{\tau}_s$ 较大时，属横向裂纹扩展模式；大小适宜的 $\bar{\tau}_s$，属混合失效模式，此种情形的最终拉伸强度可达到最大值。

最后指出，由上述结果再利用应力-应变关系求得的混杂复合材料的最终破坏应变仍然低于 Manders 和 Bader(1981)的实验结果，这是因为尚有许多因素未能一一顾及。

## 思 考 题

7.1 混杂复合材料有何优缺点？

7.2 混杂复合材料大致可以分为哪几种形式？

7.3 何谓混杂效应？混杂效应是如何定义的？产生混杂效应的主要原因是什么？

7.4 在层内混杂复合材料的应力重新分布分析中，7.2.2 中的修正的剪滞模型与 7.2.1 中的普通剪滞模型相比，其优点何在？采用何方法可以提高此模型的计算精度？

7.5 试用影响函数和叠加法，计算式(7.51)～(7.53)的混合边值问题，求出表 7.5 中的结果。

7.6 试由式(7.58)～(7.61)计算各位移分布，并求出表 7.6 中的结果。

7.7 式(7.63)是一种近似计算公式。试问此公式有无需要改进之处？如果需要改进，那么，在以后的计算中会遇到怎样的困难，对计算结果有何影响？

7.8 试指出层内和层间混杂复合材料破坏机制的异同之处。

7.9 低延伸和高延伸纤维或层板如何排列才能获得最大的混杂效应？

7.10 由统计分析估计的混杂复合材料最终拉伸强度或应变，为什么总是低于实验结果？试分析可能存在的原因及解决途径。

# 主 要 参 考 文 献


邓国基，曾庆敦．正交叠层板横向裂纹扩展分析(I)——初始开裂．华南理工大学学报，1997，25(11)：140～147

邓国基，曾庆敦．正交叠层板横向裂纹扩展分析(II)——多重断裂．华南理工大学学报，1997，25(12)：39～42

杜善义，王彪．复合材料细观力学．北京：科学出版社，1998

范赋群．单向纤维增强复合材料的荷载集中因子和裂纹扩展统计理论．固体力学学报，1981，(3)：287～294

杨庆生．复合材料细观结构力学与设计．北京：中国铁道出版社，2000

张志明．复合材料结构力学．北京：北京航空航天大学出版社，1993

赵建华．复合材料断裂引论讲义．合肥：中国科学技术大学，1988

周履，范赋群．复合材料力学．北京：高等教育出版社，1991

曾庆敦，林雪慧．单向复合材料的应力集中问题研究．湖南大学学报，2001，28 (4)：104～108

曾庆敦，林雪慧．界面损伤对单向复合材料拉伸统计强度的影响．湖南大学学报，2001，28(4)：20～25

曾庆敦，马锐，范赋群．复合材料正交叠层板最终拉伸强度的细观力学分析．力学学报．1994，26：451～461

曾庆敦，朱喜元．正交叠层板最终拉伸破坏的细观力学研究．华南理工大学学报，1999，27(5)：28～34

曾庆敦，黄小清，林雪慧．层内混杂复合材料应力集中问题的研究．应用数学和力学，2001，22 (2)：135～139

曾庆敦，余利杰．层间混杂复合材料的最终拉伸破坏(1)——应力集中分析．复合材料学报，1999，16 (1)：93～98

曾庆敦，余利杰．层间混杂复合材料的最终拉伸破坏(2)——强度的统计分析．复合材料学报，1999，16 (1)：99～104

Argon A S. Statistical aspects of fracture. Composite Materials Vol. 5, Fracture and Fatigue, Edited by Lawrence J Broutman. NY: Academic Press. 1974

Aveston J, Cooper G, Kelly A. Single and multiple fracture. In: The Properties of Fiber Composites, *Conference Proceedings, National Physical Laboratory*, IPC *Science and Technology* Press Ltd, 1971. 15～26

Aveston J, Kelly A. Tensile first cracking strain and strength of hybrid composites and laminates. Phil Trans R Soc London, 1980, A294: 519～534

Bader M G, Bailey J E, Curtis P T, et al. The mechanism of initiation and development of damage in multi-axial fiber-reinforced plastics on laminates. In: Proc ICCM 3, Vol. 3. UK: Cambgidge Univ Press, 1979

Bader M G, Chou T W, Quigley J. On the strength of discontinuous fiber composites with polymeric matrices. New Developments and Applications in Composites. Edited by Wilsdorf D, TMS-AIME, 1979

Bailey J E, Curtis P T, Parvizi A. On the transverse cracking and longitudinal splitting behavior of glass and carbon fiber reinforced epoxy cross-ply laminates and the effect Poisson and thermally generated strain. Proc Roy Soc London, 1979, A 366: 599～623

Bailey J E, Parvizi A. On fiber debonding effects and the mechanism of transverse-ply failure in cross-ply laminates of glass fiber/thermoset composites. J Mater Sci, 1981, 16: 649～659

Batdorf S B, Chaffarian R. Statistical treatment of stress concentration factors in damaged composites. J Mater Sci Lett, 1982, 1: 295～302

Beaumont P W R, Phillips D C. Tensile strength of notched composites. J Comp Mater, 1972, 6: 32～47

Beyerlein I J, Phoenix S L, Sastry A M. Comparison of shear-lag theory and continuum fracture mechanics for modeling fiber and matrix stresses in an elastic cracked composite lamina. Int J Solids Struc, 1996, 33: 2543～2574

Bowyer W H, Bader M G. On the reinforcement of thermoplastics by imperfectly aligned discontinuous fibers. J Mater Sci, 1972, 7: 1315

Budiansky B, Hutchinson J W, Evans A G. Matrix fracture in fiber-reinforced ceramics. J Mech Phys Solids, 1986, 34: 167～189

Bunsell A R, Harris B. Hybrid carbon and glass fiber composites. Composites, 1974, 5: 157～164

Chamis C C, Sinclair J H. Micromechanics of intraply hybrid composites: elastic and thermal properties. In: Modern developments in composite materials and structures, Edited by Vinson J R. New York: The American Society of Mechanical Engineers, 1979. 253～267

Chen P E, Lavengood R E. Stress fields around multiple inclusions. Monsanto/Washington University, ONR/ARPA Association, HPC 68-60, AD 846907, January 1969

Chen P E. Strength properties of discontinuous fiber composites. Polym Eng Sci, 1971, 11: 51

Chi Z F, Chou T W. An experimental study of the effect of prestressed loose carbon strands on composite strength. J Comp Mater, 1983, 17: 196～209

Chi Z F, Chou T W, Shen G. Determination of single fiber strength distribution from fiber bundle testings. J Mater Sci, 1984, 19: 3319～3324

Chou T W. Microstructural Design of Fiber Composites. UK: Camber Univ Press, 1992

Colemean B D. On the strength of classical fibers and fiber bundles. J Mech Phys Solids, 1958, 7: 60～70

Cox H L. The elasticity and strength of paper and other fibrous materials. Brit J Appl Phys, 1952, 3: 72～79

Crossman F W, Warren W J, Wang A S D, et al. Initiation and growth of transverse cracks and edge delamination, Ⅱ. Experimental correlation. J Comp Mater, 1980, Suppl. vol.: 88

Curtis P T, Bader M G, Bailey J E. The stiffness and strength of a polyamide thermoplastic reinforced with glass and carbon fibers. J Mater Sci, 1978, 13: 377

Daniels H E. The statistical theory of the strength of bundles of threads Ⅰ. Proc Royal Soc London, 1945, A183: 405

Dharani L R, Jones W F, Goree J G. Mathematical modeling of damage in unidirectional composites. Eng Fracture Mech, 1983, 17: 555

Fan F Q, Zeng Q D. A randomly enlarging critical core theory of unidirectionally fiber-reinforecd composites. Science in China (series A), 1994, 37 (5): 618～628

Fariborz C L, Yang C L, Harlow D G. The tensile behavior of intraply hybrid composites I: Model and simulation. J Comp Meter, 1985, 334～354

Fariborz S J, Harlow D G.. The tensile behavior of intraply hybrid composites Ⅱ: Micromechanical model. J Comp Meter, 1987, 21: 856～875

Fichter B W. Stress concentration around broken filaments in a filament-stiffened sheet. NASA TN D-5453, 1969

Friedrich K. Fractographic analysis of polymer composites. In Application of Fracture Mechanics to Composite Material Series, 6, Edited by Friedrich K, Elsevier, Amsterdam, 1989, 425

Friedrich K. Microstructural efficiency and fracture toughness of short fiber/thermoplastic matrix composites. Comp Sci Technol, 1985, 22: 43～74

Fukunaga H, Chou T W, Fukuda H. Probabilistic strength analyses of interlaminated hybrid composites. Comp Sci Technol, 1989, 35: 331

Fukuda H. Stress concentration factors in unidirectional composites with random fiber spacing, Comp Sci Tech, 1985, 22: 153～160

Fukuda H. An advanced theory of the strength of hybrid composites. J Mater Sci, 1983, 19: 974～981

Fukuda H, Chou T W. An advanced shear-lag model applicable to discontinuous fiber composites. J Comp Mater, 1981,15: 79

Fukuda H, Chou T W. A probabilistic theory for the strength of short-fiber composites. J Mater Sci, 1981, 16: 1088

Fukuda H, Chou T W. A probabilistic theory of the strength of short-fiber composites and variable fiber length and orientation. J Mater Sci, 1982, 17: 1003

Fukuda H, Chou T W. Stress concentrations in a hybrid composite sheet. Trans ASME, J Appl Mech, 1983, 50: 845～848

Fukuda H, Chou T W. Stress concentrations around a discontinuous fiber in a hybrid composite sheet. Trans Japan Soc Comp Mater, 1981, 7:37～42

Fukunaga H, Chou T W, Fukuda H. Strength of intermingled hybrid composites. J Reinf Plastics Comp, 1984, 3: 145～146

Fukuda H, Chou T W. Monte-Carlo simulation of the strength of hybrid composites. J Comp Mater, 1982, 16: 357

Fukuda H, Kawata K. On the strength distribution of unidirectional fiber composites. Fiber Sci Technol, 1977, 10: 53

Fukuda H, Kawata K. Stress distribution of laminates including discontinuous layers. Fiber Sci Tech, 1980, 13: 226～267

Garrett K W, Bailey J E. Effect of resin failure strain on the tensile properties of glass fiber-reinforced polyester cross-ply laminates. J Mater Sci, 1977, 12: 2189～2194

Garrett K W, Bailey J E. Multiple transverse fracture in 90° cross-ply laminates of a glass fiber-reinforced polyester. J Mater Sci, 1977, 12: 157～168

Goree J G, Gross R S. Analysis of a unidirectional composite containing broken fibers and matrix damage. Eng Fracture Mech, 1979, 13: 563

Gruber M B,Chou T W. Elastic properties of intermingled hybrid composites. Polymer Comp, 1983,4:265～269

Gucer D E, Gurland J. Comparison of statistics of two fracture modes. J Mech Phys Solids, 1962,10:365～373

Harlow D G, Phoenix S L. The chain-of boundles probability model for the strength of fibrous materials I : Analysis and conjectures. J Comp Mater, 1978, 12: 195～214

Harlow D G, Phoenix S L. The chain-of -boundles probability model for the strength of fibrous materials I : A numerical study of convergence. J Comp Mater, 1978, 12: 314～334

Harlow D G. Statistical properties of hybrid composites I : Recursion analysis. Proc Royal Soc London, 1981, A389: 67～100

Harlow D G. Statistical properties of hybrid composites: Asymptotic distributions for strain. Relia Engng System Safety, 1997, 56 (3): 197～208

Hedgepeth J M. Stress concentrations in filamentary structures. NASA TN D-882,1961

Henstenburg R B, Phoenix S L. Interfacial shear strength studies using the single-filament-composite test

Ⅱ: a probability model and Monte-Carlo simulation. Polymer Composites, 1989, 10: 389

Hikami F, Chou T W. A probabilistic theory for strength of discontinuous fiber composites. J Mater Sci, 1984,19: 1805

Hikami F, Chou T W. Explicit crack problem solutions of unidirectional composites: elastic stress concentrations. AIAA Journal, 1990, 28: 499

Jackson P W, Cratchley D. J Mech Phys Solids, 1966, 14: 49

Ji X, Hsiao G C, Chou T W. A dynamic explanation of the hybrid effect. J Comp Mater, 1981, 15: 443～461

Ji X, Liu X R, Chou T W. Dynamic stress concentration factors in unidirectional composites. J Comp Mater, 1985, 19: 269～275

Kalnin I L. Evaluation of unidirectional glass-graphite fiber/epoxy resin composites. Composite Materials Testing and Design (Second Conference), ASTM STP 497, American Society for Testing and Materials, 1972:551～563

Kelly A. Strong Solids, 2nd ed. Oxford: Clarendon Press. 1973

Kies J A. US Naval Research Laboratory, Report No. 5752, 1962

Lees J K. A study of the tensile strength of short fiber reinforced plastics. Polym Eng Sci, 1968,8: 195

Lei S C. A stochastic model for the damage growth during the transverse cracking process in composite laminates. Ph D Thesis, Drexel University, 1986

Ling L, Zeng Q D. Analysis of stress concentrations in unidirectional composites taking into account the tensile load in the matrix. Acta Mech Solida Sinica, 1998,11 (4): 318～328

Manders P W, Bader M G. The strength of hybrid carbon/glass fiber composites: Part 1. Failure strain enhancement and failure mode. J Mater Sci, 1981, 16: 2233～2245

Manders P W, Bader M G. The strength of hybrid carbon/glass fiber composites: Part 2. A statistical model. J Mater Sci, 1981, 16: 2246～2256

Manders P W, Chou T W, Jones F R, et al. Statistical analysis of multiple fracture in 0/90/0 glass fiber/epoxy resin laminates. J Mater Sci, 1983, 18: 2876～2889

Manders P W, Chou T W. Variability of carbon and glass fibers, and The strength of aligned composites. J Reinforced Plastics and Composites, 1983, 2: 43

McCartney L N. Mechanics of matrix cracking in brittle-matrix fiber-reinforced composites. Proc Roy Soc London, 1987, A 409: 329～350

McLaughlin T F. A photoelastic analysis of fiber discontinuities in composite materials. J Comp Mater, 1968, 2 (I): 44

McLaughlin T F. Effect of fiber geometry on stress in fiber reinforced composite materials. Experimental Mechanics, October 1966

Nairn J A. Fracture mechanics of unidirectional composites using the shear-lag model Ⅰ: Theory. J Comp Mater, 1988, 22: 561～588

Ochiai S, Schulte K, Peters P W M. Strain concentration factor for fiber and matrix in unidirectional composites. Comp Sci Technol, 1991, 41: 237～256

Oh K P. A Monte-Carlo study of the strength of unidirectional fiber-reinforced composites. J Comp Mater, 1979, 13: 311

Parvizi A, Garrett K W, Bailey J E. Constrained cracking in glass fiber-reinforc edepoxy cross-ply laminates. J Mater Sci, 1978, 13: 1195～2013

Phoenix S L, Schwartz P, Robinson Ⅳ H H. Statistical for the strength and lifetime in creep-rupture of

model carbon/epoxy composites. Comp Sci Technol, 1988, 32: 81～120

Rosen B W. Tensile failure of fibrous composites. AIAA J, 1964, 2: 1985～1991

Rosen B W. Thermomechanical properties of fibrous composites. Proc Royal Soc London, 1970, A319: 79～94

Sastry A M, Phoenix S L. Load redistribution near non-aligned fiber breaks in a two-dimensional unidirectional composite using break-influence superposition. J Mater Sci Lett, 1993, 12: 1596～1599

Scop P M, Argon A S. Statistical theory of strength of laminated composites Ⅱ. J Comp Mater, 1969, 3: 30～47

Smith R L. The random variation of stress concentration factors in fibrous composites. J Mater Sci Lett, 1983, 2: 385～391

Smith R L. A probability model for fibrous composites with local load share. Proc Roy Soc London, 1980, A 372: 539～553

Smith R L. A note on a probability model for fibrous composites. Proc Roy Soc London, 1982, A 382: 179～182

Smith R L, Phoenix S L. Asymptotic distributions for the failure of fibrous materials under series-parallel structure and equal load sharing. J Appl Mech, 1981, 48: 75～82

Smith R L, Phoenix S L, Greenfield M R, et al. Lower-tail approximations for the probability of three-dimensional fibrous composites with hexagonal geometry. Proc Roy Soc London, 1983, A 388: 351～391

Smith R L, Phoenix S L. A comparison of probabilistic technique for the strength of fibrous materials under local load-sharing among fibers. Int J Solids Struc, 1983, 19: 479～496

Stowell E Z, Liu T S. J Mech Phys Solids, 1961, 9: 242

Tsai S W, Hahn H T. Introduction to Composites. USA: Technomic Publishing Co Inc, 1980

Van Dyke P, Hedgepeth J M. Stress concentration from single-filament failures in composite materials, Text Res J, 1969, 39: 618～625

Vinson J R, Chou T W. Composite Materials and Their Use in Structures. London: Elsevier Applied Science, 1975

Wang A S D, Crossman F W. Initiation and growth of transverse cracks and edge delamination, Ⅰ. An energy method. J Comp Mater, 1980, Supp. vol.: 71

Wang A S D, Chou P C, Lei S C. A stochastic model for the growth of matrix cracks in composite laminates. J Comp Mater, 1984, 18: 239～254

Wang A S D. Fracture mechanics of sublaminate cracks in composite materials. Comp Technol Review, 1984, 6: 45～62

Wang A S D. Strength, failure and fatigue analysis of laminates. Engineering Materials Handbook, 1987 1: 236～251. ASM International, Metals Park, Ohio 44073

Wang A S D, Slomiana M, Bucinell R B. Delamination crack growth in composite laminates. In: Delamination and Debonding of Materials, Edtied by Johnson. ASTM STP, 1985. 876, 135～167

Wang A S D, Kirshore N N, Li C A. On crack development in graphite-epoxy $[0_2/90_n]_s$ laminates under uniaxial tension. J Comp Sci Technol, 1985, 23: 1～31

Wolstenhome, L C, Smith R L. Statistical inference about stress concentrations in fiber-matrix composites. J Mater Sci, 1989, 24: 1559

Zeng Q D. A random critical-core theory of microdamage in interply hybrid composites: II-ultimate failure. Comp Sci Technol, 1994, 52: 481～487

Zeng Q D. A statistical analysis of the tensile failure and hybrid effect of an intraply hybrid composites. Int

J Fracture, 1995, 68: 351～362

Zeng Q D, Fan F Q, Zhang Y Y. A random critical-core theory of microdamage in interply hybrid composites: I—first failure and hybrid effect. Comp Sci Technol, 1993, 49: 341～348

Zeng Q D, Lin Xuehui. Study on tensile failure mechanism and hybrid effect of intraply hybrid composites. Acta Mech Solida Sinica, 2002

Zeng Q D, Lin Xuehui. Study of the influence of interfacial damage on stress concentrations in intraply hybrid composites. Acta Mech Solida Sinica, 2001, 14 (2): 161～168

Zeng Q D, Wang Z L, Ling L. A study of the influence of interfacial damage on stress concentrations in unidirectional composites. Comp Sci Tech, 1997, 57: 129～135

Zhu Y T, Zhou G H, Zheng Z G. A statistical theory of composite materials strength. J Comp Mater, 1989, 23: 280～287

Zweben C. An approximate method of analysis for notched unidirectional composites. Eng Fracture Mech, 1974, 6: 1～10

Zweben C, Rosen B W. A statistical theory of material strength with application to composite materials. J Mech Phys Solids, 1970, 18: 189～206

Zweben C. Tensile failure of fibrous composites. AIAA J, 1968, 6: 2325～2331

Zweben C. Tensile strength of hybrid composites. J Mat Sci, 1977, 12: 1325～1337